# Apresentação do Curso

10 ANOS DE MATEMÁTICA DA ESPCEX

**Prof. Arthur Lima e Hugo Lima**

# Sumário

# Apresentação do Curso

Olá, tudo bem? Aqui é o professor Arthur Lima. Neste breve encontro pretendo apresentar a proposta do curso **10 ANOS DE MATEMÁTICA DA ESPCEX**. Antes, porém, vou me apresentar brevemente para aqueles que não me conhecem ainda. Sou professor de cursos preparatórios para concursos há mais de 7 anos, sempre atuando nas disciplinas de exatas: Matemática, Raciocínio Lógico, Matemática Financeira e Estatística. Esta também é a minha área de formação: sou Engenheiro Aeronáutico pelo ITA. Sempre gostei muito de exatas e, felizmente, eu tenho bastante facilidade nesta área. Sei que ESTA NÃO É A REALIDADE da maioria dos meus alunos, e tomo todos os cuidados para apresentar a matemática da maneira mais compreensível possível. Gosto sempre de me direcionar àqueles alunos que tem mais dificuldade na disciplina, que tem um verdadeiro "trauma" com as ciências exatas 😉. Ah, eu também já fui concurseiro! Fui aprovado nos concursos da Receita Federal para os cargos de Auditor-Fiscal e Analista-Tributário, tendo exercido o cargo de Auditor por 6 anos. Hoje, felizmente, posso me dedicar integralmente a vocês, fazendo o que tanto amo: LECIONAR.

Este curso será produzido por mim em conjunto com o prof. Hugo Lima, veja a apresentação dele abaixo:

*Olá! Meu nome é Hugo Lima e sou Engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Trabalhei por 5 anos e meio na Força Aérea Brasileira, como oficial engenheiro, sendo que, no período final, tive que conciliar o trabalho com o estudo para o concurso da Receita Federal. Fui aprovado para o cargo de Auditor-Fiscal em 2012, cargo que exerço atualmente. Trabalho com concursos públicos desde 2014 sempre com as matérias de exatas!*

Mas, afinal de contas, **o que pretendemos levar a você neste curso de questões de Matemática da ESPCEX?**

Como o próprio nome do curso diz, o nosso objetivo é resolvermos as últimas 10 provas de Matemática da ESPCEX com o objetivo de praticar adequadamente todos os temas que mais caem.

É importante deixar claro que este curso NÃO TEM por objetivo rever a teoria de todos os assuntos de matemática. Este curso foi elaborado especialmente para você que está com o tempo muito escasso de agora até a data da prova, e precisa focar naquilo que tem maior probabilidade de ser cobrado. Para isso, nada melhor que resolver muitas questões de prova!

Veja a seguir o cronograma deste nosso curso:

| Aula | Conteúdo | Data de disponibilização |
|---|---|---|
| **00** | Prova 2018 resolvida | 6-fev |
| **01** | Prova 2017 resolvida | 16-fev |

| | | |
|---|---|---|
| **02** | Prova 2016 resolvida | 26-fev |
| **03** | Prova 2015 resolvida | 6-mar |
| **04** | Prova 2014 resolvida | 16-mar |
| **05** | Prova 2013 resolvida | 26-mar |
| **06** | Prova 2012 resolvida | 6-abr |
| **07** | Prova 2011 resolvida | 16-abr |
| **08** | Prova 2010 resolvida | 26-abr |
| **09** | Prova 2009 resolvida | 6-mai |

Vale lembrar que, como em todos os nossos cursos no DIREÇÃO CONCURSOS, você poderá baixar todas as aulas em PDF para o seu computador, tablet, celular etc. Desta forma você pode estudar onde, quando e como quiser!

Espero que você goste deste curso, e que ele seja bastante útil na sua preparação! Vou ficar na torcida para que, assim como vários dos meus ex-alunos nestes 7 anos como professor, você seja aprovado e venha me contar a sua história de sucesso!

**Saudações,**

**Prof. Arthur Lima**

ProfArthurLima

# ESPCEX - 2018

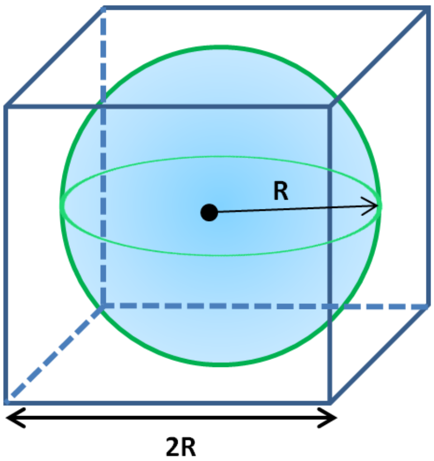
**1. ESPCEX – 2018)**

O volume de uma esfera inscrita em um cubo com volume 216 $cm^3$ é igual a

[A] 38$\pi$ $cm^3$ [B] 36$\pi$ $cm^3$ [C] 34$\pi$ $cm^3$ [D] 32$\pi$ $cm^3$ [E] 30$\pi$ $cm^3$

**Resolução:**

Pela descrição do enunciado, temos a seguinte ilustração geométrica:




Repare o volume do cubo é que vale 216 $cm^3$. Ou seja:

$$Volume_{cubo} = Aresta^3 \Leftrightarrow$$

$$216 = (2R)^3 \Leftrightarrow$$

$$216 = 8R^3 \rightarrow$$

$$\frac{216}{8} = R^3 \Leftrightarrow$$

$$27 = R^3$$

Assim, o volume da esfera dada é:

$$Volume_{esfera} = \frac{4\pi}{3}.27 \Leftrightarrow$$

$$Volume_{esfera} = 4\pi .9 \Leftrightarrow$$

$$Volume_{esfera} = 36\pi\ cm^3$$

**Resposta: B**

**2. ESPCEX – 2018)**

Dentre as alternativas a seguir, aquela que apresenta uma função trigonométrica de período $2\pi$, cujo gráfico está representado na figura abaixo é

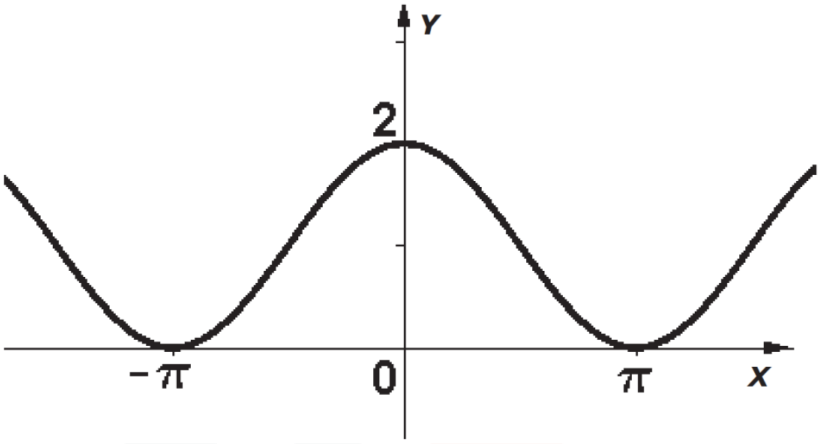
[A] f(x) = 1- sen($\pi$ - x).

[B] f(x) = 1 + cos($\pi$ - x).

[C] f(x) = 2 - cos($\pi$ + x).

[D] f(x) = 2 - sen($\pi$ + x).

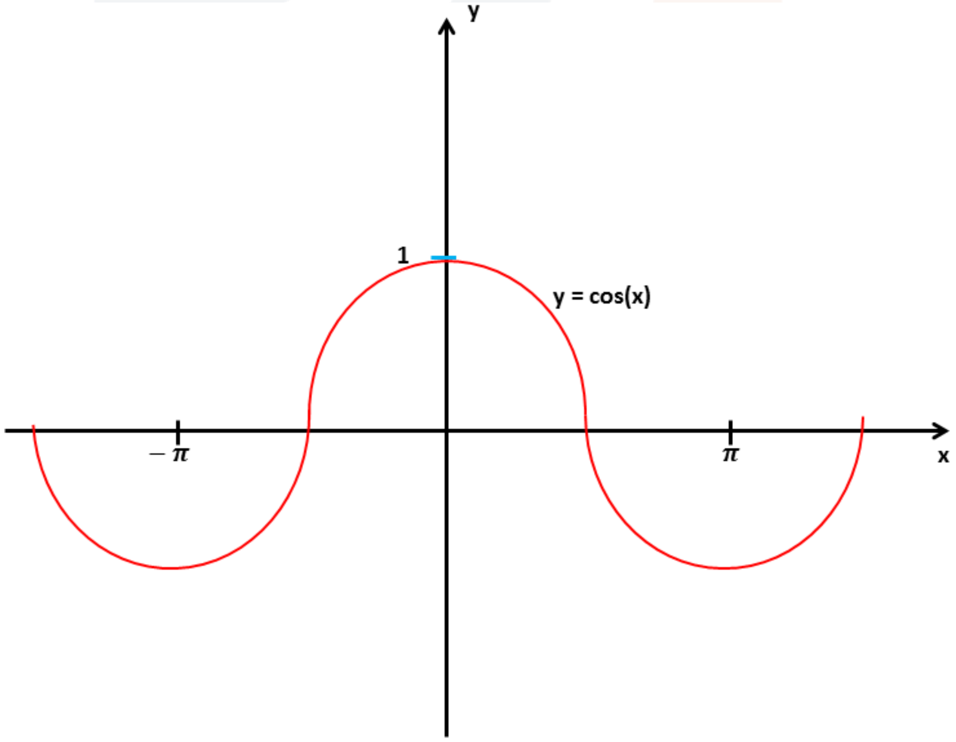
[E] f(x) = 1 - cos($\pi$ - x).



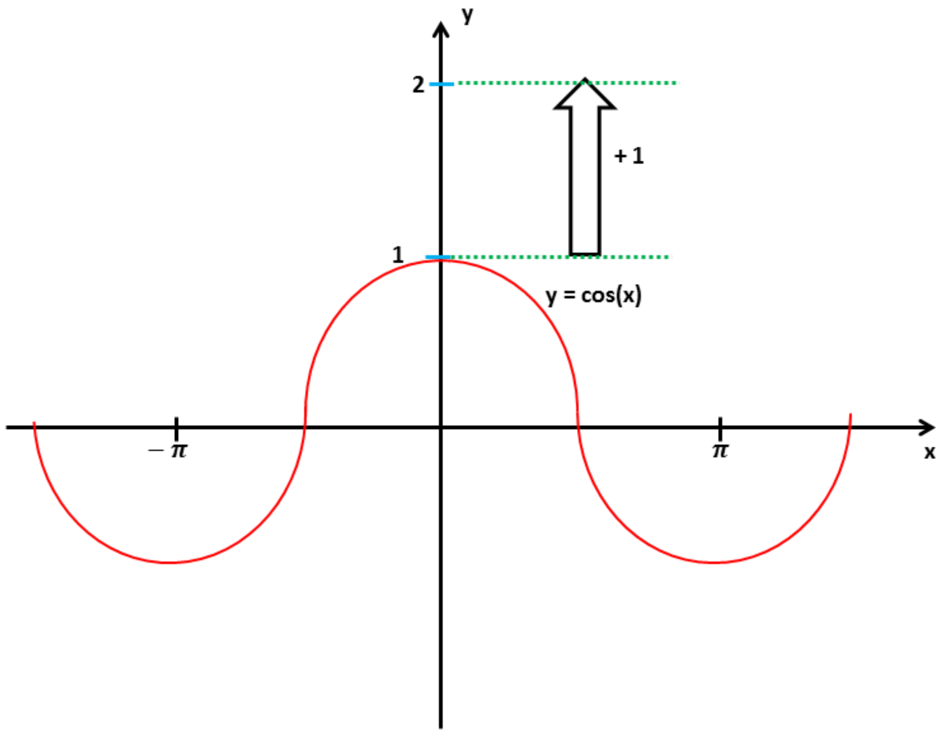

Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**Resolução:**

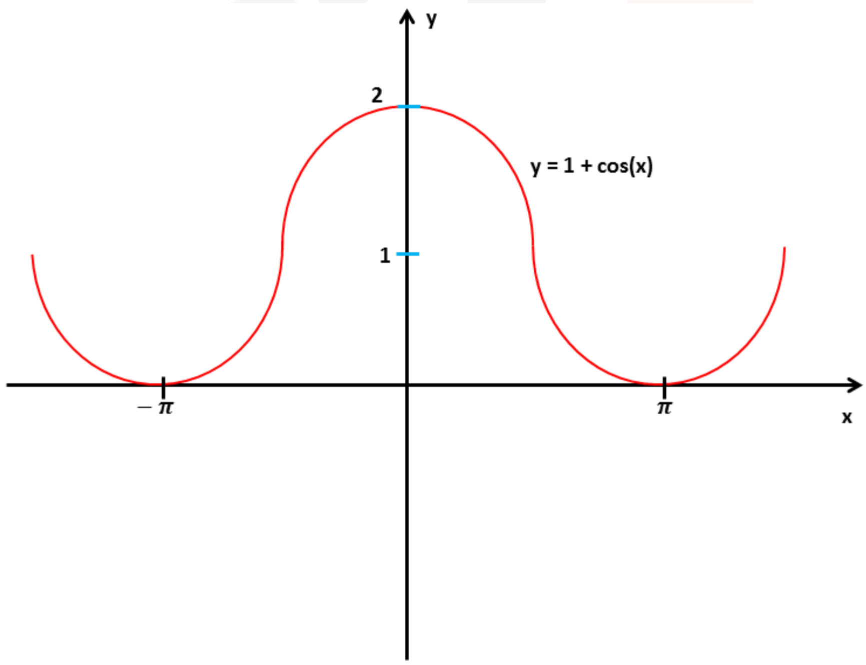
Inicialmente temos a função cossenóide y = cos(x), que graficamente pode ser representada por:




Veja que adicionando uma unidade à função, teremos:




Com isso, teremos:




Note que este é o gráfico que questão traz, o qual corresponde à função:

$$f(x) = 1 + \cos(x)$$

Repare que podemos explorar ainda a seguinte expressão:

$$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \text{sen}(a).\text{sen}(b)$$

Ou seja:

$$\cos(\pi + k) = \cos(\pi).\cos(k) - \text{sen}(\pi).\text{sen}(k) \Leftrightarrow$$

$$\cos(\pi + k) = (-1).\cos(k) - 0.\text{sen}(k) \Leftrightarrow$$

$$\cos(\pi + k) = -\cos(k)$$

Quando k = - x, teremos:

$$\cos(\pi - x) = -\cos(-x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

Note que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, implica em $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$, ou seja:

$$\cos(x) = -\cos(\pi - x)$$

Acrescentando "+1" aos dois membros, teremos:

$$1 + \cos(x) = 1 + [-\cos(\pi - x)]$$

$$1 + \cos(x) = 1 - \cos(\pi - x)$$

Atente ao fato que estamos à procura de uma expressão igual a

$$f(x) = 1 + \cos(x)$$

Como " $1 - \cos(\pi - x)$ " é igual ao que "$1 + \cos(x)$", sendo este a função f(x) procurada, então:

$$1 + \cos(x) = 1 - \cos(\pi - x)$$

$$f(x) = 1 - \cos(\pi - x)$$

**Resposta: E**

---

**3. ESPCEX – 2018)**

Seja A o maior subconjunto de no qual está definida a função real f(x) = $\sqrt{\dfrac{x^3 - 5x^2 - 25x + 125}{x + 5}}$ Considere, ainda, B o conjunto das imagens de f. Nessas condições,

[A] A = IR - {-5} e B = $\mathbb{R}_+$ - {10}

[B] A = IR - {-5} e B = $\mathbb{R}_+$.

[C] A = IR - {-5} e B = IR.

[D] A = IR -{-5,5} e B = $\mathbb{R}_+$.

[E] A = IR -{-5,5} e B = $\mathbb{R}_+$ - {10}.

**Resolução:**

Podemos começar a fatorando a expressão polinomial que está no numerador. Assim:

$$x^3 - 5x^2 - 25x + 125$$

Tornando em evidência a menor potência entre os dois primeiros termos, assim como o menor múltiplo comum entre 25 e 125, obteremos o seguinte:

$$x^2(x - 5) - 25.(x - 5) \Leftrightarrow$$

$$(x - 5).(x^2 - 25) \Leftrightarrow$$

$$(x - 5).(x^2 - 5^2)$$

Note que a diferença de quadrados " $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$ " é um produto notável. Com isso, temos:

$$x^2 - 5^2 = (x+5).(x-5)$$

Ou seja:

$$(x - 5).(x^2 - 5^2) \Leftrightarrow$$

$$(x - 5).(x+5).(x-5) \Leftrightarrow$$

$$(x - 5)^2.(x+5)$$

Assim, teremos a expressão:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 5x^2 - 25x + 125}{x+5}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-5)^2.(x+5)}{(x+5)}}$$

Desde que x ≠ - 5, teremos:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-5)^2.(x+5)}{(x+5)}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-5)^2.1}{1}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{(x-5)^2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = |x - 5|$$

Assim, a função f é definida para qualquer valor real de x, desde que x que seja diferente de – 5. Ou seja, o domínio A da função é o conjunto máximo:

A = IR - {-5}

Além disso, a função f é sempre positiva ou nula, quando x = 5. Assim, f(x) ≥ 0. Portanto seu conjunto imagem B é $\mathrm{IR}_+$. Isto é, B = $\mathrm{IR}_+$.

Podemos concluir que:

A = IR - {-5} e B = $\mathrm{IR}_+$

**Resposta: B**

---

4. **ESPCEX – 2018)**

Enrico guardou moedas em um cofrinho por um certo período de tempo e, ao abri-lo, constatou que:

I. O cofrinho contém apenas moedas de R$ 0,25, R$ 0,50 e R$ 1,00.

II. A probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,25 é o triplo da probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50.

III. Se forem retiradas 21 moedas de R$ 0,25 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50 passa a ser $\frac{9}{40}$.

IV. Se forem retiradas 9 moedas de R$ 0,50 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 1,00 passa a ser $\frac{1}{4}$.

Diante dessas constatações, podemos afirmar que a quantidade de moedas de R$ 0,25 nesse cofrinho era
[A] 27. [B] 32. [C] 33. [D] 81. [E] 108.

**Resolução:**

Inicialmente, vamos quantificar as moedas da seguinte forma:

Quantidade de Moedas de R$ 0,25 = V moedas

Quantidade de Moedas de R$ 0,50 = C moedas

Quantidade de Moedas de R$ 1,00 = U moedas.

Vamos analisar cada item da questão:

**Segundo item:**

→ A probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,25 é o triplo da probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50.

Ou seja:

$$Prob_{0,25} = 3.\ Prob_{0,50} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n^{\underline{o}}\ de\ moedas\ de\ \text{R\$}\ 0{,}25}{Total\ de\ Moedas} = 3.\ \frac{n^{\underline{o}}\ de\ moedas\ de\ \text{R\$}\ 0{,}50}{Total\ de\ Moedas} \rightarrow$$

nº de Moedas de R$ 0,25 = 3.( nº de Moedas de R$ 0,50) ⇔

$$V = 3.C$$

**Terceiro item:**

→ Se forem retiradas 21 moedas de R$ 0,25 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50 passa a ser $\frac{9}{40}$.

Considerando essa nova situação, a nova quantidade de moedas de R$ 0,25 passa ser (V - 21) moedas. Com isso, o novo total passa a ser

[(V - 21) + C + U] moedas.

Deste modo, teremos:

$$Prob_{0,50} = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ moedas\ de\ 0{,}50}{Novo\ total\ de\ Moedas} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{40} = \frac{c}{[(V-21)+C+U]} \rightarrow$$

$$40.C = 9.V - 189 + 9C + 9U \rightarrow$$

$$40.C - 9C = 9.V - 189 + 9U \Leftrightarrow$$

$$31.C = 9.V - 189 + 9U$$

**Quarto item:**

IV. Se forem retiradas 9 moedas de R$ 0,50 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 1,00 passa a ser $\frac{1}{4}$.

Considerando essa hipótese, a nova quantidade de moedas de R$ 0,50 passa a ser (C - 9) moedas. Desta forma, o novo total passa a ser [V + (C - 9) + U] moedas.

Com isso, teremos:

$$Prob_{1,00} = \frac{n^{o}\ de\ moedas\ de\ 1,00}{Novo\ total\ de\ Moedas} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{U}{[V + (C - 9) + U]} \rightarrow$$

$$4.U = V + (C - 9) + U \rightarrow$$

$$4.U - U = V + (C - 9) \Leftrightarrow$$

$$3.U = V + (C - 9)$$

Reunindo as três equações encontradas, teremos:

$$\begin{cases} (I): V = 3.C \\ (II): 31.C = 9.V - 189 + 9.U \\ (III): 3.U = V + (C - 9) \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) nas equações (II) e (III), teremos:

→Em (II) teremos:

$$31.C = 9.V - 189 + 9.U \Leftrightarrow$$

$$31.C = 9.(3.C) - 189 + 9.U \Leftrightarrow$$

$$31.C = 27.C - 189 + 9.U \rightarrow$$

$$31.C - 27.C - 9.U = -189 \Leftrightarrow$$

$$4.C - 9.U = -189 \text{ (i)}$$

→Em (III) teremos:

$$3.U = V + (C - 9) \Leftrightarrow$$

$$3.U = (3.C) + (C - 9) \Leftrightarrow$$

$$3.U = 4.C - 9 \rightarrow$$

$$3.U - 4.C = -9 \text{ (ii)}$$

Com isso, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (i): 4.C - 9.U = -189 \\ (ii): -4.C + 3.U = -9 \end{cases}$$

Multiplicando a equação (ii) por 3, obtemos a equação: - 12.C + 9.U = - 27.

Deste Modo, teremos um sistema equivalente ao anterior:

$$\begin{cases} (i): 4.C - 9.U = -189 \\ (ii): -12.C + 9.U = -27 \end{cases}$$

Somando as equações (i) e (ii), teremos:

$$-8.C = -216 \rightarrow$$

$$C = \frac{-216}{-8} \Leftrightarrow$$

$$C = 27$$

Como V = 3.C, então:

$$V = 3.27 \Leftrightarrow$$

$$V = 81$$

Assim, podemos afirmar que nesse cofrinho tinha **81 moedas** de R$ 0,25.

**Resposta: D**

---

**5. ESPCEX – 2018)**

A equação $\log_3 x = 1 + 12.\log_{x^2} 3$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é

[A] 0. [B] $\frac{1}{3}$. [C] $\frac{3}{2}$. [D] 3. [E] 9.

**Resolução:**

Temos a seguinte equação logarítmica:

$$\log_3 x = 1 + 12.\log_{x^2} 3$$

Podemos aqui nos lembrar que $\log_a b.\log_b a = 1$. Ou seja:

$$\log_3 x^2.\log_{x^2} 3 = 1 \rightarrow$$

$$\log_{x^2} 3 = \frac{1}{\log_3 x^2}$$

Com isso, teremos a seguinte equação:

$$\log_3 x = 1 + 12.\frac{1}{\log_3 x^2} \Leftrightarrow$$

Como $\log_b a^n = n.\log_b a$, então:

$$\log_3 x = 1 + 12.\frac{1}{\log_3 x^2} \Leftrightarrow$$

$$\log_3 x = 1 + 12.\frac{1}{2.\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$\log_3 x = 1 + \frac{6}{\log_3 x} \Leftrightarrow$$

Substituindo $\log_3 x$ = k, obtemos:

$$k = 1 + \frac{6}{k} \rightarrow$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

Como Δ > 0, então as raízes k = $\log_3 x$ são reais, o implica que x = $3^k$ também é real.

Observe que a soma das raízes da equação em k vale:

$$k_1 + k_2 = -\frac{-1}{1} \Leftrightarrow$$

$$k_1 + k_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\log_3(x_1 . x_2) = 1 \rightarrow$$

$$\log_3(x_1 . x_2) = 1 \rightarrow$$

$$x_1 . x_2 = 3^1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 . x_2 = 3$$

Assim, o produto dessas raízes é 3.

**Resposta: D**

---

**6. ESPCEX – 2018)**

A equação da reta tangente ao gráfico da função f(x) = $x^2$ – 6x + 1, no ponto (4,-7), é igual a
[A] y = - 2x + 1.

[B] y = 3x – 19.

[C] y = x – 11.

[D] y = - 3x + 5.

[E] y = 2x - 15.

**Resolução:**

Observe que o ponto (4,-7) é comum tanto à reta do tipo " y = mx + n " quanto à parábola da função "f(x) = $x^2$ – 6x + 1 ". Ou seja:

$$f(x) = y \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 1 = mx + n \rightarrow$$

$$x^2 - (6 + m).x + (1 - n) = 0$$

Encontramos este trinômio do 2º grau. Veja que a reta tangencia a parábola, ou seja, a parábola é tocada pela reta em apenas um único ponto. Deste modo, podemos afirmar que diante disto, esse trinômio tem apenas uma única raiz que é x = 4 do ponto (4,-7). Assim, seu discriminante é nulo, isto é:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-(6+m)\right)^2 - 4.1.(1-n) = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 + 12.m + m^2 - 4 + 4.n = 0 \text{ (I)}$$

Além disso, já que o ponto (4, -7) também é da reta y = mx + n, então:

$$-7 = 4.m + n \rightarrow$$

$$n = -7 - 4.m \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), teremos:

$$36 + 12.m + m^2 - 4 + 4.n = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 + 12.m + m^2 - 4 + 4.(-7 - 4.m) = 0 \Leftrightarrow$$

$$36 + 12.m + m^2 - 4 - 28 - 16.m = 0 \Leftrightarrow$$

$$m^2 - 4.m + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(m - 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$m = 2$$

Uma vez que n = - 7 – 4.m e m = 2, então:

$$n = -7 - 4.m \Leftrightarrow$$

$$n = -7 - 4.2 \Leftrightarrow$$

$$n = -7 - 8 \Leftrightarrow$$

$$n = -15$$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico da função f(x) = $x^2$ – 6x + 1 é:

$$y = m.x + n \Leftrightarrow$$

$$y = 2.x + (-15) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{y = 2.x - 15}$$

**Resposta: E**

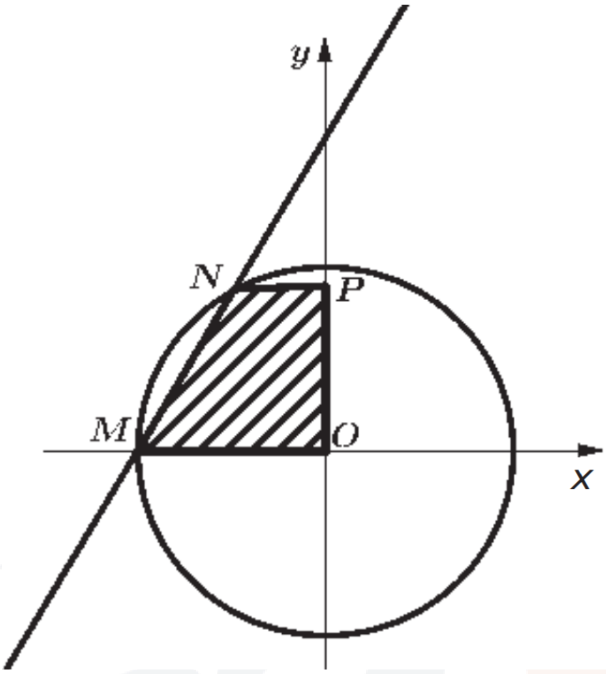
---

**7. ESPCEX – 2018)**

Na figura abaixo, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 3$ e a reta suporte do segmento MN tem coeficiente angular igual a $\sqrt{3}$.

O volume do sólido gerado pela rotação do trapézio MNPO em relação ao eixo y é

[A] $\frac{3\pi}{8}$. [B] $\frac{21\pi}{8}$. [C] $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. [D] $\frac{24\pi\sqrt{3}}{8}$. [E] $\frac{63\pi\sqrt{3}}{8}$.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**Resolução:**

De um modo geral, a equação da circunferência de centro (a, b) e raio R é dada por:

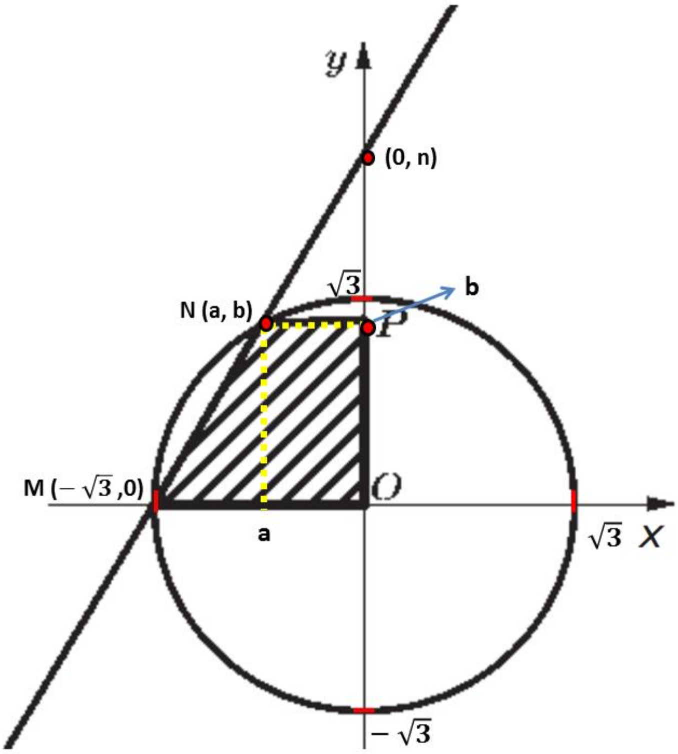
$$(x_c - a)^2 + (y_c - b)^2 = R^2$$

Assim, teremos:

$$x^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \sqrt{3}^2$$

Note que a equação tem centro (0,0) e raio $\sqrt{3}$. Deste modo, obtemos os seguintes incrementos à figura:




A equação da reta MN é do tipo " y = m.x + n ". Com isso, quando o ponto

(- $\sqrt{3}$, 0) passa por essa reta, teremos a relação:

$$0 = m.(-\sqrt{3}) + n \rightarrow$$

$$\sqrt{3}.m = n.$$

O enunciado da questão nos informa que o coeficiente angular igual a $\sqrt{3}$, ou seja, m = $\sqrt{3}$. Com isso:

$$\sqrt{3}.m = n \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}.\sqrt{3} = n \Leftrightarrow$$

$$n = 3$$

Desta forma, a equação da reta dada é y = $\sqrt{3}$.x + 3.

Repare que o ponto N(a,b) pertence tanto à circunferência de equação

$x^2 + y^2 = 3$ quanto à reta de equação y = $\sqrt{3}$.x + 3. Com isso, podemos formar o sistema:

$$\begin{cases} (I): a^2 + b^2 = 3 \\ (II): \sqrt{3}.\mathrm{a} + 3 = \mathrm{b} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), teremos:

$$a^2 + b^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + (\sqrt{3}.\mathrm{a} + 3)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 3.a^2 + 6\sqrt{3}.a + 9 = 3$$

$$4.a^2 + 6\sqrt{3}.a + 6 = 0\ (\div 2) \Leftrightarrow$$

$$2.a^2 + 3\sqrt{3}.a + 3 = 0$$

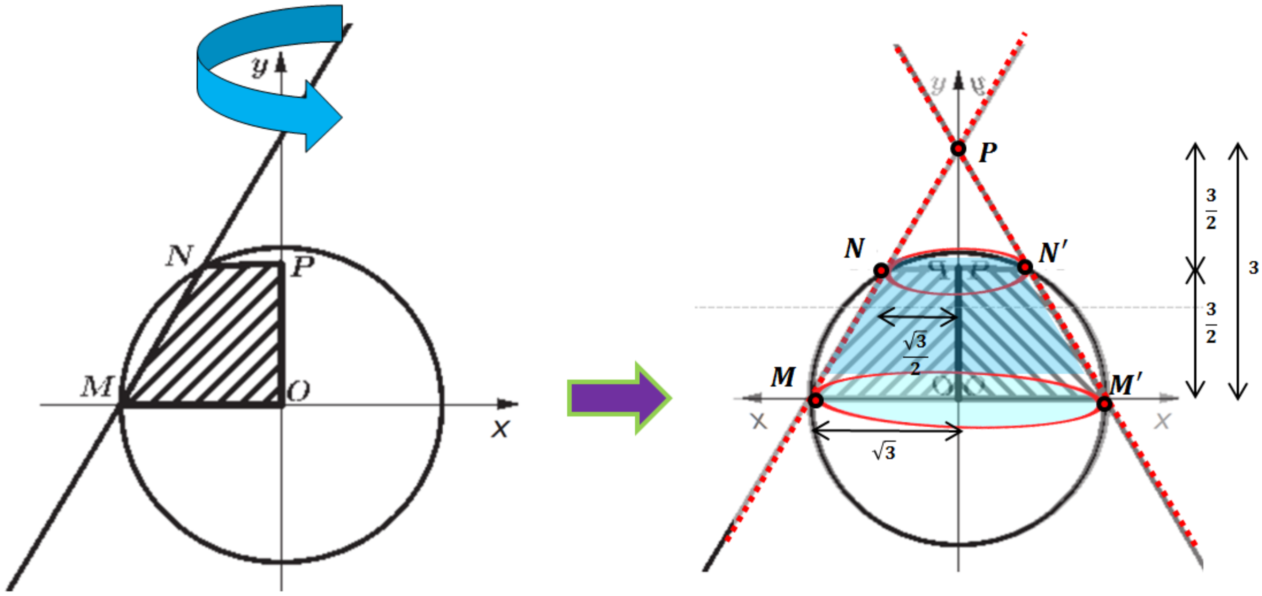
$$\langle \Delta = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 4.2.3 = 3 \rightarrow a = \frac{-3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} \begin{cases} a' = \dfrac{-3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ a'' = \dfrac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Observe que para:

$$\begin{cases} a' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow b = \sqrt{3}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3 = \frac{3}{2} \\ a'' = -\sqrt{3} \rightarrow b = \sqrt{3}.\left(-\sqrt{3}\right) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Repare que b > 0, logo $b = \frac{3}{2}$ e $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Após encontrarmos todas as medidas necessárias, podemos girar o plano em torno do eixo das ordenadas y, obtendo a seguinte figura:




Repare que a sólido gerado entre as retas MN e N'M' é um tronco de cone, podendo seu volume ser calculado pela diferença entre os volumes dos cones grande e pequeno. Ou seja:

$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = Volume_{Cone\ Grande} - Volume_{Cone\ Pequeno} \Leftrightarrow$$

$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = \frac{1}{3}.\pi.\left(\sqrt{3}\right)^2.3 - \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = \frac{9}{3}.\pi - \frac{9}{24}.\pi \Leftrightarrow$$

$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = \frac{72}{24}.\pi - \frac{9}{24}.\pi \Leftrightarrow$$

$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = \frac{63}{24}.\pi \Leftrightarrow$$

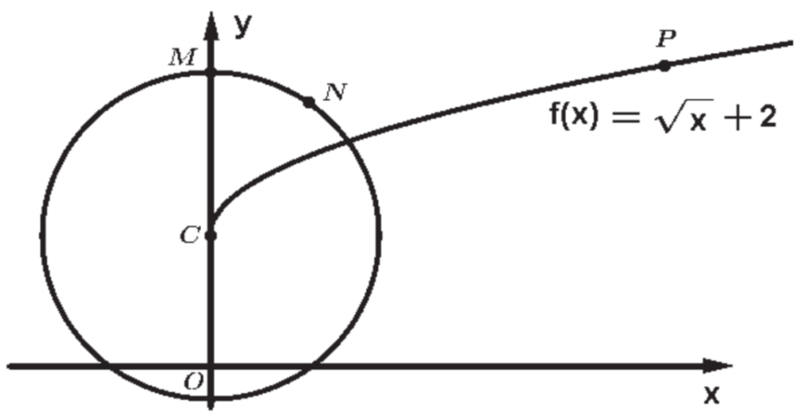
$$Volume_{Tronco\ de\ Cone} = \frac{21}{8}.\pi$$

**Resposta: B**

**8. ESPCEX – 2018)**

Os pontos M(0,y), com y ≥ 0 e N($\sqrt{3}$, 4) pertencem a uma circunferência de centro C(0, 2). Considere o ponto P, do gráfico de f(x)= $\sqrt{x}$ + 2 , que possui ordenada y igual à do ponto M. A abscissa x do ponto P é igual a

[A] $\sqrt{7}$. [B] $\sqrt{7}$ + 2. [C] 7. [D] 9. [E] 12.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**Resolução:**

Perceba que a distância entre os pontos C e N equivale exatamente ao raio da circunferência dada. Ou seja:

$$d_{CN} = R$$

$$\sqrt{(x_C - x_N)^2 + (y_C - y_N)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(0 - \sqrt{3}\right)^2 + (2 - 4)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$R = \sqrt{7}$$

Observe que o ponto C é (0, $y_c$), enquanto ponto M é um deslocamento do ponto C de R unidades para cima, e com isso, teremos o ponto M sendo (0, $y_c$ + R), ou seja, M(0, 2 + $\sqrt{7}$ ).

Considerando o ponto P como sendo (x, y), ocorre que ordenada y igual à do ponto M. Ou seja:

$$y = 2 + \sqrt{7}$$

Uma vez que o ponto P pertence à função f(x) = $\sqrt{x}$ + 2, então qualquer ponto genérico do gráfico da função assume (x, $\sqrt{x}$ + 2).

Assim,

$$y = 2 + \sqrt{7} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} + 2 = 2 + \sqrt{7} \rightarrow$$

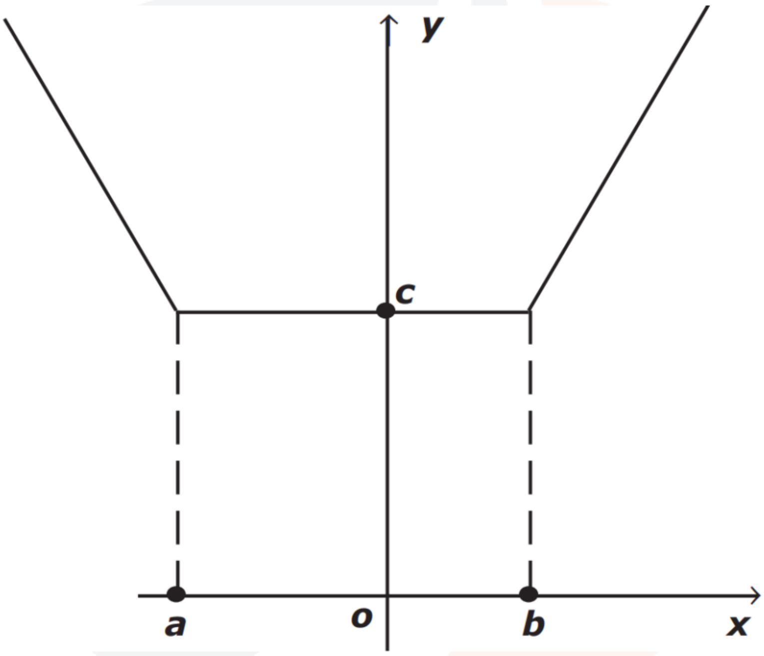
$$x = 7.$$

**Resposta: C**

**9. ESPCEX – 2018)**

Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real f(x) = |x - 2| + |x + 3|, então o valor de a + b + c é igual a

[A] -7. [B] -6. [C] 4. [D] 6. [E] 10.



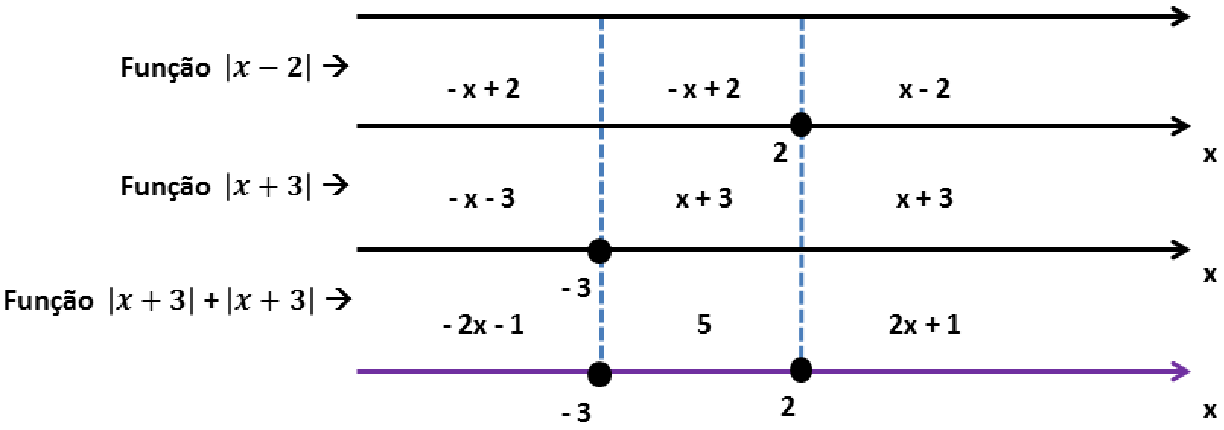

Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**Resolução:**

Fazendo uma interpretação quanto às diferentes formas que a função f pode assumir, conforme o valor de x, teremos:

$$\begin{cases} |x - 2| = \begin{cases} x - 2, se\ x \geq 2; ou \\ -x + 2, se\ x < 2. \end{cases} \\ |x + 3| = \begin{cases} x + 3, se\ x \geq 3; ou \\ -x - 3, se\ x < 3. \end{cases} \end{cases}$$

Organizando essas informações em uma tabela, obtemos:




Com base no resultado da tabela, podemos observar que:

1) a função f é decrescente até x = - 3, pois assume a forma " -2x - 1". Com isso, podemos concluir que a = - 3.

2) a função f é constante e igual a 5, quando – 3 ≤ x ≤ 2. Desta forma, pelo gráfico acima, podemos concluir que a = - 3 e b = 2. Além disso, f(a) = f(b) = c, sendo que f(-3) = f(2) = 5. Logo, c = 5.

3) a função f é crescente a partir de x = 2, pois assume a forma " 2x + 1". Com isso, podemos reforçar a conclusão de que b = 2.

Assim, a + b + c = (-3) + 2 + 5 = 4.

**Resposta: C**

---

**10. ESPCEX – 2018)**

O número de raízes reais da equação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

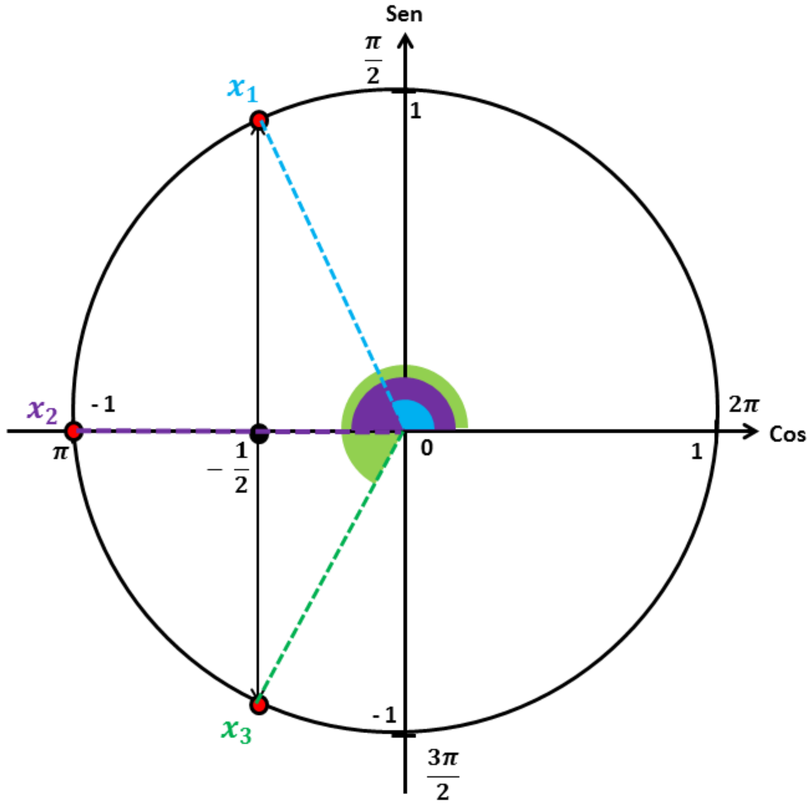
[A] 0. [B] 1. [C] 2. [D] 3. [E] 4.

**Resolução:**

Substituindo cosx por y, teremos a equação $2.y^2 + 3.y + 1 = 0$, resolvendo, teremos:

$$\langle \Delta = 3^2 - 4.2.1 = 1 \rightarrow y = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \begin{cases} y' = \frac{-3+\sqrt{1}}{4} = -\frac{1}{2} \rightarrow cosx = -\frac{1}{2} \\ y'' = \frac{-3-\sqrt{1}}{4} = -1 \rightarrow cosx = -1 \end{cases}$$

Com isso, podemos construir o ciclo trigonométrico e encontrar as seguintes raízes no intervalo de 0 a $2\pi$:

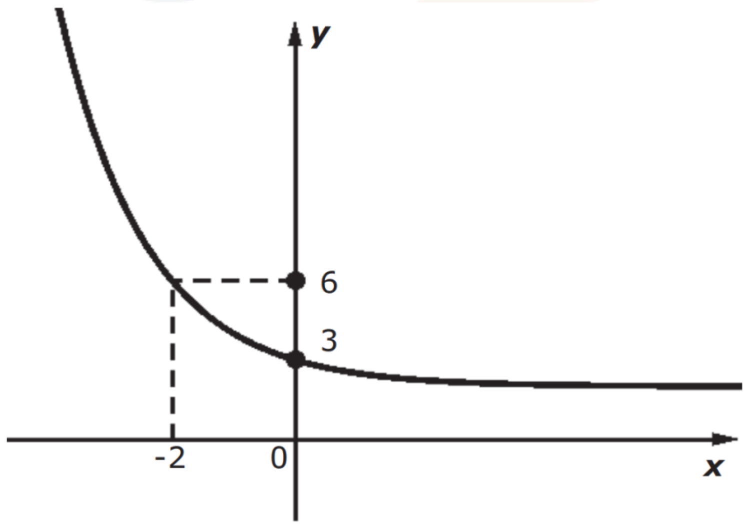



Note que as raízes encontradas $x_1$, $x_2$ e $x_3$ estão entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Logo, temos exatamente três raízes no intervalo $]0, 2\pi[$.

**Resposta: D**

**11. ESPCEX – 2018)**

A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com a e b reais, $a>0$, $a\neq 1$ e $b\neq 0$.



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

Então, o valor de f(2) - f(-2) é igual a

[A] $-\frac{3}{4}$. [B] $-\frac{15}{4}$. [C] $-\frac{1}{4}$. [D] $-\frac{7}{6}$. [E] $-\frac{35}{6}$.

**Resolução:**

Observando o gráfico acima, podemos concluir que $\begin{cases} (I): f(0) = 3 \\ (II): f(-2) = 6 \end{cases}$. Ou seja:

Em (I), temos que $a^0 + b = 3$. Como a ≠ 0, então $a^0$ = 1, Logo $1 + b = 3 \rightarrow b = 2$.

Em (II), teremos:

$$a^{-2} + 2 = 6 \rightarrow a^{-2} = 4^1 \rightarrow a = \pm 4^{-\frac{1}{2}} \rightarrow a = \pm \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{4}} \rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

Já que a > 0, então $a = \frac{1}{2}$. Deste modo, teremos a seguinte função:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$$

Assim,

$$f(2) - f(-2) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - [\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2] =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2 =$$

$$\frac{1}{4} - 4 =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{16}{4} =$$

$$-\frac{15}{4}$$

**Resposta: B**

**12. ESPCEX – 2018)**

Considere a função f: IR → IR definida por f(x) = $\left(\sqrt{3}\right)^{4 + 2\text{sen}3x}$ e a função g: IR → IR definida por g(x) = $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{1 + 3\cos 2x}$. O produto entre o valor mínimo de f e o valor máximo de g é igual a

[A] $\frac{1}{81}$. [B] $\frac{1}{9}$. [C] 1. [D] 9. [E] 81.

**Resolução:**

Repare o seguinte:

$$-1 \leq \text{Sen}3x \leq 1$$

Multiplicando a expressão por 2, teremos:

$$-2 \leq 2.\text{Sen}3x \leq 2$$

Acrescentando 4 unidades, teremos:

$$2 \leq 4 + 2.\text{Sen}3x \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$2 \leq 4 + 2.\text{Sen}3x \leq 6 \Leftrightarrow$$

A função f é crescente, pois a base da potência é superior a 1. Logo, quanto maior for o expoente, maior será a potência e consequentemente quanto menor for o expoente, menor será a potência, ou seja:

$$\sqrt{3}^{2} \leq \sqrt{3}^{4\,+\,2.\text{Sen}3x} \leq \sqrt{3}^{6} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}^{2} \leq f(x) \leq \sqrt{3}^{6} \Leftrightarrow$$

$$3 \leq f(x) \leq 27 \Leftrightarrow$$

Deste modo, $f(x)_{mín} = 3$.

Por outro lado,

$$-1 \leq \text{Cos}2x \leq 1$$

Multiplicando a expressão por 3, teremos:

$$-3 \leq 3.\text{Cos}2x \leq 3$$

Acrescentando 1 unidade, teremos:

$$-2 \leq 1 + 3.\text{Cos}2x \leq 4 \Leftrightarrow$$

A função g é decrescente, pois a base da potência é inferior a 1. Logo, quanto maior for o expoente, menor será a potência e consequentemente quanto menor for o expoente, maior será a potência, ou seja:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{1\,+\,3.\text{Cos}2x} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{4} \Leftrightarrow$$

$$3 \geq g(x) \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

Deste modo, $g(x)_{máx} = 3$.

Assim,

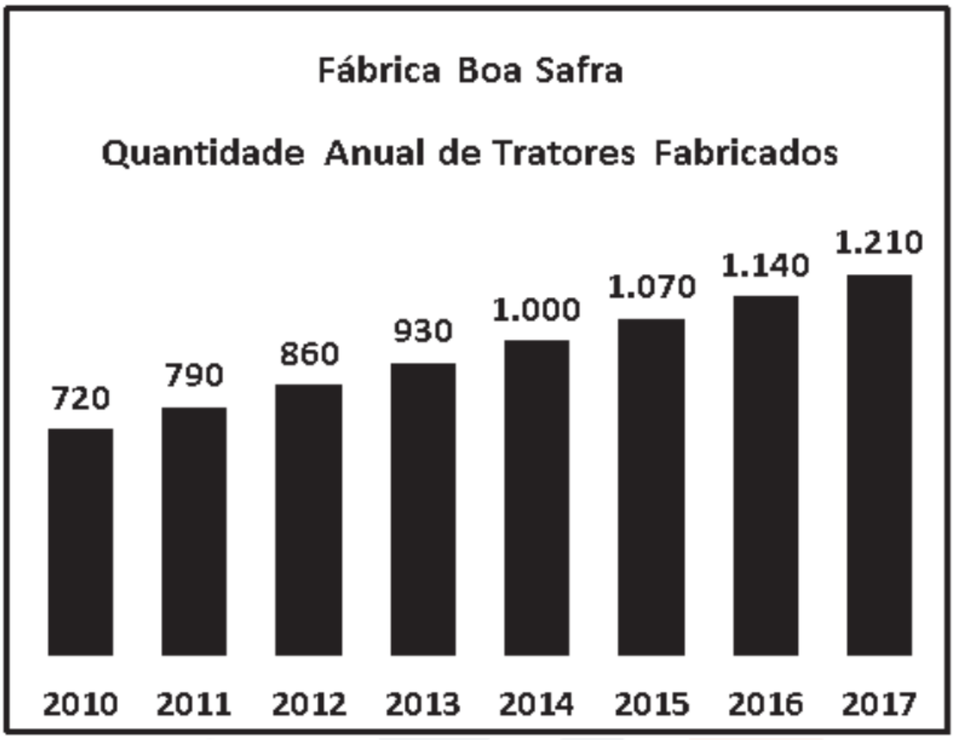
$$f(x)_{mín} \cdot g(x)_{máx} = 3 \cdot 3 = 9$$

**Resposta: D**

---

**13. ESPCEX – 2018)**

Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20.000 tratores até o final do ano de 2025. O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista

[A] deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores.

[B] deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.

[C] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1.850 tratores a menos.

[D] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos.

[E] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

**Resolução:**

Note que a evolução da quantidade de tratores produzidos se comporta conforme uma progressão aritmética – P.A de razão 70, ou seja:

$a_1$ = 720 (em 2010)

$a_2$ = 790 (em 2011)

$a_3$ = 860 (em 2012)

$a_4$ = 930 (em 2013)

...

Com isso, podemos dizer que exatamente no ano de 2025, após 16 anos, será produzido:

$a_{16}$ = 720 + 15 x 70 ⇔

$$a_{16} = 720 + 1050 \Leftrightarrow$$

$$a_{16} = 1770 \text{ tratores.}$$

De 2010 até 2025 será produzida uma quantidade de tratores equivalentes à soma dos 16 termos da P.A:

$$S_{16} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = \Leftrightarrow$$

$$S_{16} = \left(\frac{a_1 + a_{16}}{2}\right).16 \Leftrightarrow$$

$$S_{16} = \left(\frac{720 + 1770}{2}\right).16 \Leftrightarrow$$

$$S_{16} = 2490.8 \Leftrightarrow$$

$$S_{16} = (2500 - 10).8 \Leftrightarrow$$

$$S_{16} = 20 \text{ mil} - 80$$

$$S_{16} = 19920$$

Assim, a meta prevista não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

**Resposta: E**

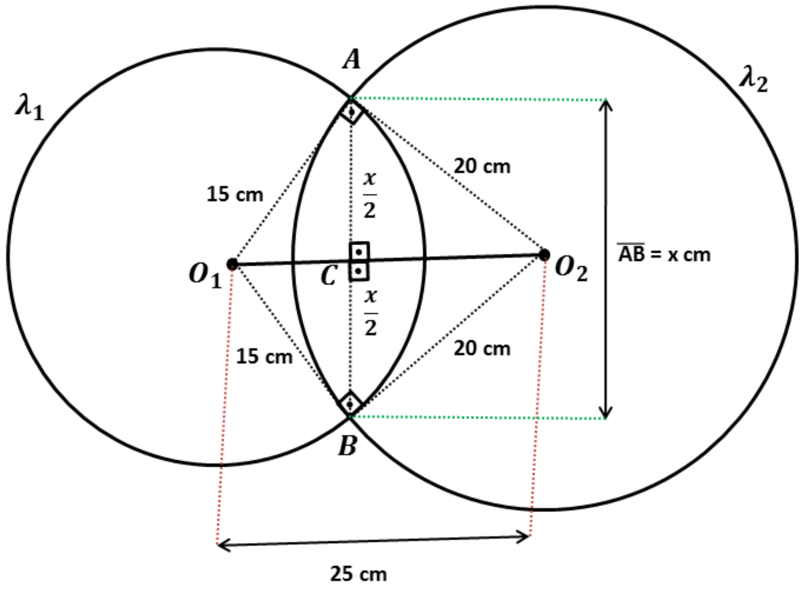
**14. ESPCEX – 2018)**

Os centros de dois círculos distam 25 cm. Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm, a medida da corda comum a esses dois círculos é

[A]12 cm. [B] 24 cm. [C] 30 cm. [D] 32 cm. [E] 36 cm.

**Resolução:**

Com a descrição do enunciado, podemos intersectar duas circunferências $\lambda_1$e $\lambda_2$. Sendo seus centros $O_1$e $O_2$respectivamente. Onde a corda $\overline{AB}$ é a corda comum a esses dois círculos cuja medida vale x cm. Isto é:



Repare que o triângulo formado pelo segmento $\overline{O_1O_2}$, sendo esta medida a distância entre os centros e equivalente a 25 cm, e os raios $\overline{AO_1}$ = 15 cm e $\overline{AO_2}$ = 20 cm é retângulo. Pois, $(\overline{AO_1})^2 + (\overline{AO_2})^2 = (\overline{O_1O_2})^2 \Leftrightarrow (15)^2 + (20)^2 = (25)^2 \Leftrightarrow$ 225 + 400 = 625.

Com isso, podemos observar que a medida da corda comum $\overline{AB}$ às duas circunferências é o dobro da altura relativa à base $\overline{O_1O_2}$ dos triângulos $\Delta AO_1O_2$ e $\Delta BO_1O_2$, os quais são congruentes entre si.

Aplicando o teorema das áreas temos:

$$Área_{\Delta AO_1O_2} = \text{(produto dos catetos)/2 ou (base x altura)/2}$$

Ou seja:

$$Área_{\Delta AO_1O_2} = \frac{\overline{AO_1}\ x\ \overline{AO_2}}{2} \text{ ou } Área_{\Delta AO_1O_2} = \frac{\overline{O_1O_2}\ x\ \overline{\left(\frac{AB}{2}\right)}}{2}$$

$$\frac{\overline{AO_1}\ x\ \overline{AO_2}}{2} = \frac{\overline{O_1O_2}\ x\ \overline{\left(\frac{AB}{2}\right)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{15\ x\ 20}{2} = \frac{25\ .\ \frac{x}{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$150 = \frac{25x}{4} \rightarrow$$

$$600 = 25.x \rightarrow$$

$$x = 600/25$$

$$x = 24 \text{ cm.}$$

Assim, a medida da corda comum a esses dois círculos mede 24 cm.

**Resposta: B**

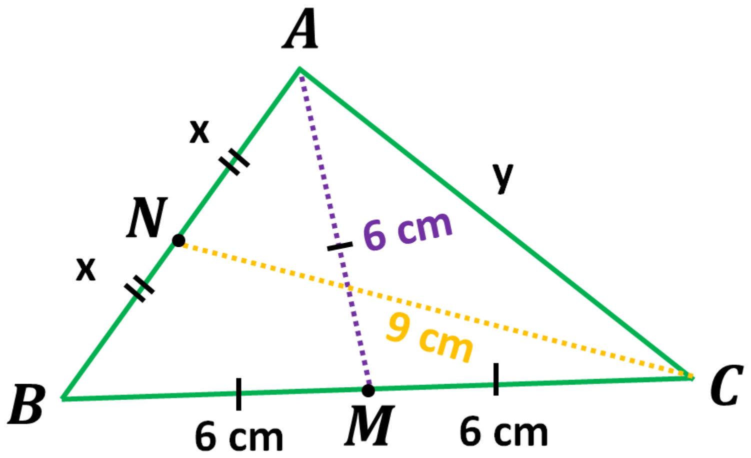
**15. ESPCEX – 2018)**

Em um triângulo ABC, $\overline{BC}$ = 12 cm e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm. Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm, qual a área desse triângulo?

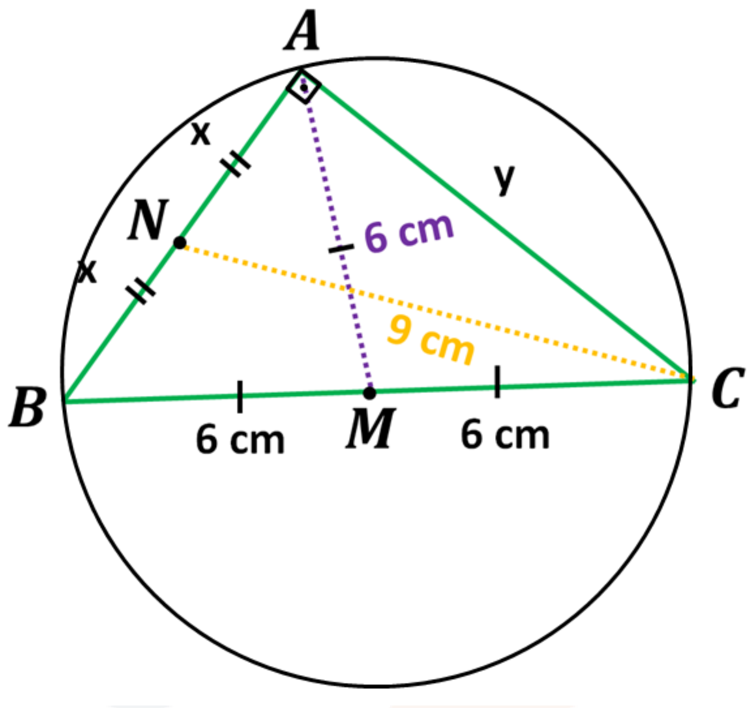
[A] $\sqrt{35}\ cm^2$. [B] $2\sqrt{35}\ cm^2$. [C] $6\sqrt{35}\ cm^2$. [D] $\frac{\sqrt{35}cm^2}{2}$. [E] $3\sqrt{35}\ cm^2$.

**Resolução:**

Podemos ilustrar a situação apresentada pelo enunciado, da seguinte forma:




Repare que as medidas BM, AM e CM são congruentes. Com isso, podemos passar uma circunferência nos pontos A, B e C. Ou seja:




Repare que o arco central BC que não passa por A, que mede 180°, é o dobro do ângulo inscrito que se localiza no vértice A. Por isso $B\hat{A}C$ = 180°/2 = 90°.

Deste modo, podemos tirar as seguintes conclusões:

$$\begin{cases} (\text{I}): BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ (\text{II}): CN^2 = AN^2 + AC^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\text{I}): 12^2 = (2x)^2 + y^2 \\ (\text{II}): 9^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Subtraindo a equação (I) da (II), teremos:

$$3x^2 = 144 - 81 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = 63 \rightarrow$$

$$x^2 = 21 \rightarrow$$

$$x = \sqrt{21} \text{ cm}$$

Substituindo na equação (II), obtemos:

$$9^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$81 = 21 + y^2 \rightarrow$$

$$y^2 = 60 \rightarrow$$

$$y = \sqrt{60} \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{4 \ x \ 15} \Leftrightarrow$$

$$y = 2\sqrt{15} \text{ cm}$$

Portanto a área do triângulo ABC vale:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\text{AB x AC}}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(2x).y}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = x.y \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21}.\ 2\sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = 2.\sqrt{(7x3)\ x\ (3\ x\ 5)} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = 2.\sqrt{7\ x\ 9\ x\ 5} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = 2.3.\sqrt{7\ x\ 5} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = 6.\sqrt{35}\ cm^2$$

**Resposta: C**

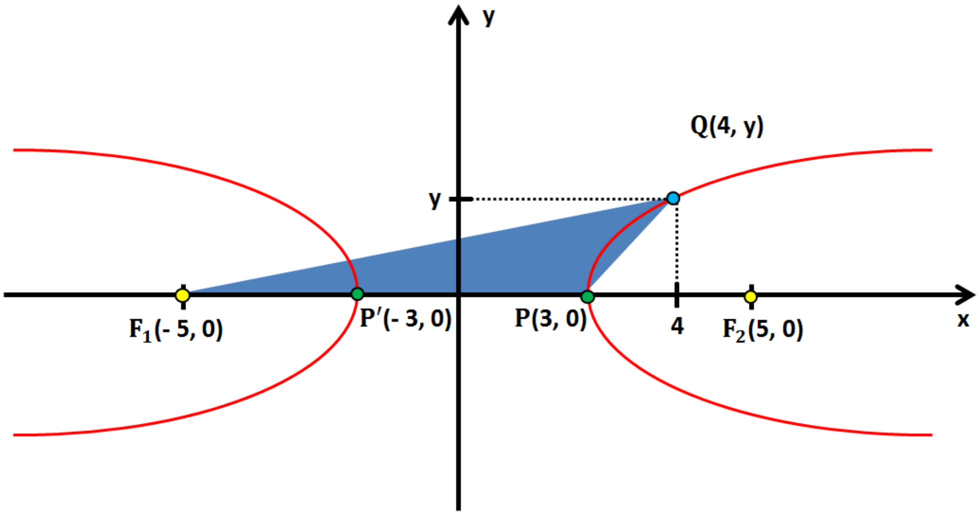
**16. ESPCEX – 2018)**

Uma hipérbole tem focos $F_1$(-5,0) e $F_2$(5,0) e passa pelos pontos P(3,0) e Q(4,y), com y>0. O triângulo com vértices em $F_1$, P e Q tem área igual a

[A] $\frac{16\sqrt{7}}{3}$. [B] $\frac{16\sqrt{7}}{5}$ [C] $\frac{32\sqrt{7}}{3}$. [D] $\frac{8\sqrt{7}}{3}$. [E] $\frac{8\sqrt{7}}{5}$.

**Resolução:**

Conforme o enunciado da questão, podemos propor a análise geométrica:




Observe que a hipérbole tem centro na origem. Com isso, teremos a equação descrita do tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ e } c^2 = a^2 + b^2$$

Onde a é o eixo. Repare que com base no gráfico acima, podemos concluir que:

$$\overline{P'P} = 2.a(\text{Eixo real}) \Leftrightarrow$$

$$6 = 2.a \rightarrow$$

$$a = 3$$

$$\overline{F_1F_2} = 2.c\ (\text{Distância focal}) \Leftrightarrow$$

$$10 = 2.c \rightarrow$$

$$c = 5$$

Para calcular o eixo imaginário, temos:

$$5^2 = 3^2 + b^2 \rightarrow$$

$$b = 4.$$

Deste modo, a equação da hipérbole fica:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Observe que o ponto (4, y) pertence à Hipérbole. Desta forma, ao substituirmos na equação encontrada, obtemos:

$$\frac{4^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow$$

$$\frac{16}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{y^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{9} = \frac{y^2}{16} \rightarrow$$

$$y^2 = \frac{16}{9}.7 \rightarrow$$

$$y = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

Assim, a área do triângulo $F_1PQ$ vale:

$$S_{\Delta F_1PQ} = \frac{\overline{F_1P}.y}{2} \Leftrightarrow S_{\Delta F_1PQ} = \frac{(5-(-3)).\frac{4\sqrt{7}}{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{\Delta F_1PQ} = \frac{8.\frac{4\sqrt{7}}{3}}{2} \Leftrightarrow S_{\Delta F_1PQ} = \frac{16\sqrt{7}}{3}$$

**Resposta: A**

**17. ESPCEX – 2018)**

Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é

[A] 168. [B] 196. [C] 224. [D] 227. [E] 231.

**Resolução:**

Temos duas situações em que a soma de três números naturais resulta em ímpar:

I) Os Três números são ímpares; ou

II) Dois números são pares e o outro é ímpar;

➔ Para o primeiro caso, devemos selecionar um grupo de três números entre os 8 valores disponíveis no conjunto **{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}**. Assim, aplicamos as combinações simples de 8 tomados 3 a 3, pois a ordem de seleção não é importante, dado que em qualquer ordem de escolha de três números será sempre os mesmos que comporão o subconjunto. Com isso, teremos:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\ x\ 5!} \Leftrightarrow C_{8,3} = \frac{8\ x\ 7\ x\ 6\ x\ 5!}{6\ x\ 5!} \Leftrightarrow$$

$$C_{8,3} = 56 \text{ grupos}$$

➔ Para segundo caso, também aplicamos as combinações simples pelo mesmo motivo.

Sendo que devemos selecionar dois números do conjunto **{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}**. Ou seja:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\ x\ 5!} \Leftrightarrow C_{7,2} = \frac{7\ x\ 6\ x\ 5!}{2\ x\ 5!} \Leftrightarrow$$

$$C_{7,2} = 21 \text{ grupos}$$

E ao mesmo tempo,

Escolher apenas um número do conjunto **{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}**. Isto é:

$$C_{8,1} = 8 \text{ grupos}$$

Como as seleções são feitas simultaneamente, então podemos aplicar o princípio multiplicativo para encontrar o total de escolhas em que temos dois números pares e um número ímpar, ou seja:

$$21 \times 8 = 168 \text{ grupos}$$

Assim, uma vez que os eventos são excludentes, então o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é calculado pela soma das possibilidades nas duas situações apresentadas, ou seja, (56 + 168) grupos = 224 grupos.

**Resposta: C**

**18. ESPCEX – 2018)**

Sabendo que o número complexo i (sendo i a unidade imaginária) é raiz do polinômio $p(x)= x^5 - 2x^4 - x + 2$, podemos afirmar que p(x) tem

[A] duas raízes iguais a i, uma raiz racional e duas raízes irracionais.

[B] i e -i como raízes complexas e três raízes irracionais.

[C] uma raiz complexa i e quatro raízes reais.

[D] i e -i como raízes complexas e três raízes inteiras.

[E] três raízes simples e uma raiz dupla.

**Resolução:**

Ao fatorar o polinômio, teremos:

$$p(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2 \Leftrightarrow$$

$$p(x) = x^4.(x - 2) - 1.(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$p(x) = (x^4 - 1).(x - 2)$$

Uma vez que $x^4 - 1 = (x^2 + 1).(x^2 - 1)$, então:

$$p(x) =(x^2 + 1).(x^2 - 1).(x - 2)$$

Do mesmo modo, $x^2 - 1 = (x + 1).(x - 1)$, Logo:

$$p(x) =(x^2 + 1).(x + 1).(x - 1).(x - 2)$$

Para encontrarmos as raízes do polinômio, temos:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1).(x + 1).(x - 1).(x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm i; ou \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1; ou \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1; ou \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Podemos concluir o seguinte:

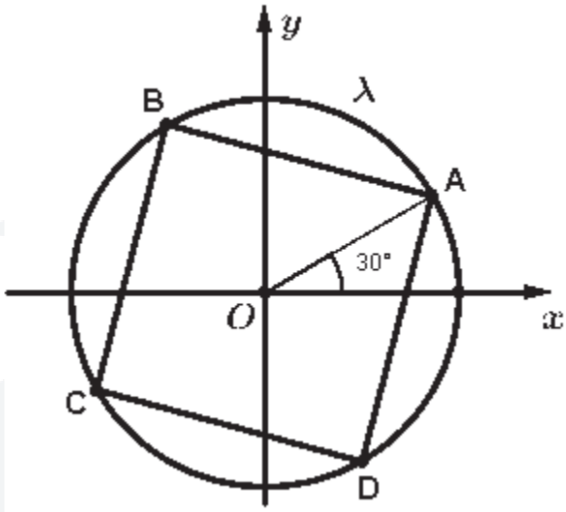
$$\begin{cases} temos\ três\ raízes\ inteiras{:}\ -1, +1\ \ e +2 \\ temos\ duas\ raíze\ imaginárias{:}\ -i\ e\ i \end{cases}$$

**Resposta: D**

**19. ESPCEX – 2018)**

No plano complexo, temos uma circunferência λ de raio 2 centrada na origem. Sendo ABCD um quadrado inscrito à λ, de acordo com a figura abaixo, podemos afirmar que o número complexo que representa o vértice B é

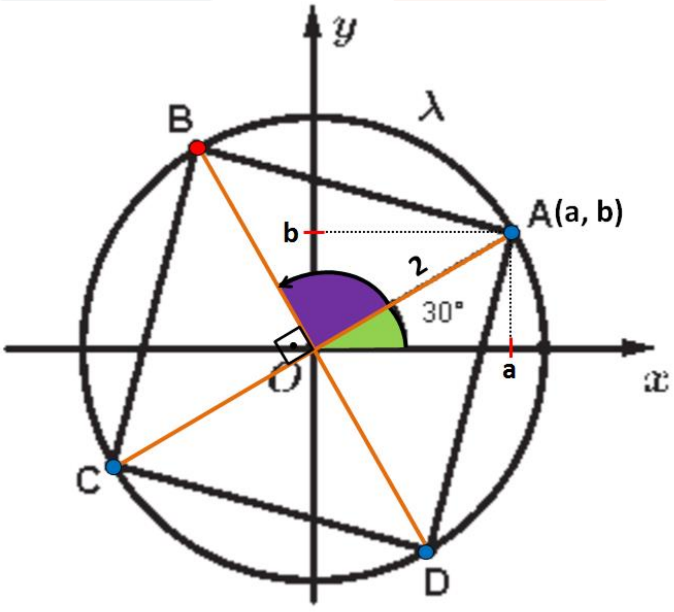
[A] $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$ [B] $-\sqrt{3}-i.$ [C] $-1+\sqrt{3}i.$ [D] $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$ [E] $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**Resolução:**

Sabemos que as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si, sendo que com isso, o ângulo descrito na trajetória do vértice A para B, no sentido anti-horário, é igual a 90°.



Podemos concluir com base na ilustração que:

$$\begin{cases} a = 2.Cos30° \\ b = Sen30° \end{cases}$$

Deste modo, o ponto A pode ser descrito como sendo um número complexo a + bi. Isto é:

$$A = 2.(\cos 30° + i.\mathrm{sen}30°)$$

Observe que o ponto B é obtido pela rotação da circunferência, em 90°, no sentido anti-horário e ao redor da origem.

Assim, para haver a rotação de 90° no sentido anti-horário, ao redor da origem, saindo do ponto A para o ponto B, basta fazer uma multiplicação pelo número complexo " cos90° + i.sen90° ". Ou seja:

$$B = 2.(\cos 30° + i.\mathrm{sen}30°).(\cos 90° + i.\mathrm{sen}90°) \Leftrightarrow$$

$$B = 2.[\cos(30° + 90°) + i.\mathrm{sen}(30° + 90°)] \Leftrightarrow$$

$$B = 2.[\cos 120° + i.\mathrm{sen}120°] \Leftrightarrow$$

$$B = 2.(-\cos 60° + i.\mathrm{sen}60°] \Leftrightarrow$$

$$B = 2.(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) \Leftrightarrow$$

$$B = -1 + \sqrt{3}.i$$

**Resposta: C**

---

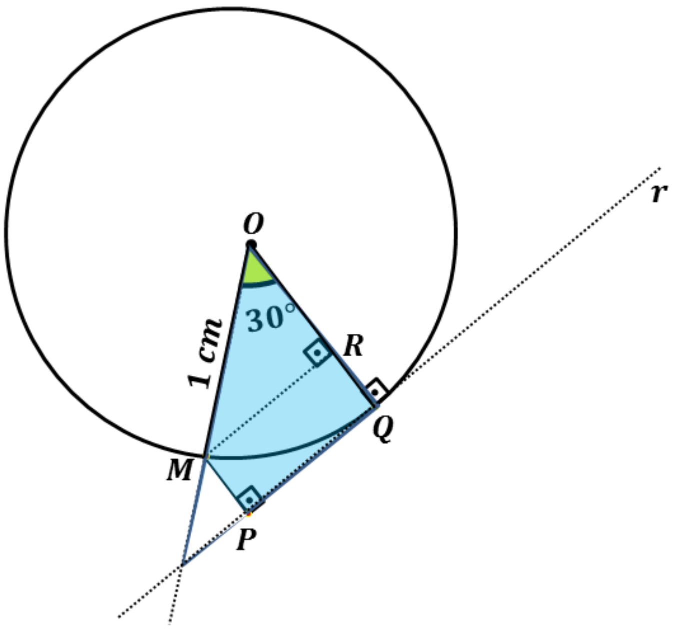
**20. ESPCEX – 2018)**

Considere uma circunferência de centro O e raio 1 cm tangente a uma reta r no ponto Q. A medida do ângulo MÔQ é 30°, onde M é um ponto da circunferência. Sendo P o ponto da reta r tal que PM é paralelo a OQ, a área (em cm²) do trapézio OMPQ é

[A] $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. [B] $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. [C] $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. [D] $2 - \frac{\sqrt{3}}{8}$. [E] $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Resolução:**

Pela contextualização, podemos ilustrar o problema geométrico, da seguinte forma:




Com base na figura geométrica, podemos tirar as seguintes conclusões:

(I):

$$\text{Cos } 30° = \frac{OR}{OM} \Leftrightarrow$$

$$\text{Cos } 30° = \frac{1 - PM}{1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - PM \Leftrightarrow$$

$$PM = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

(II):

$$\text{Sen } 30° = \frac{MR}{OM} \Leftrightarrow$$

$$\text{Sen } 30° = \frac{PQ}{OM} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{PQ}{1} \Leftrightarrow$$

$$PQ = \frac{1}{2}$$

A área do trapézio OMPQ vale:

$$S_{\text{OMPQ}} = \left(\frac{PM + OQ}{2}\right).PQ \Leftrightarrow$$

$$S_{\text{OMPQ}} = \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}\right).\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{\text{OMPQ}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$S_{\text{OMPQ}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

**Resposta: A**

## Fim de aula. Até o próximo encontro!

## Saudações,

## Prof. Arthur Lima

ProfArthurLima

ProfArthurLima

Professor Arthur Lima

# Lista de questões

**1. ESPCEX – 2018)**

O volume de uma esfera inscrita em um cubo com volume 216 $cm^3$ é igual a

[A] 38$\pi$ $cm^3$ [B] 36$\pi$ $cm^3$ [C] 34$\pi$ $cm^3$ [D] 32$\pi$ $cm^3$ [E] 30$\pi$ $cm^3$

**2. ESPCEX – 2018)**

Dentre as alternativas a seguir, aquela que apresenta uma função trigonométrica de período 2$\pi$, cujo gráfico está representado na figura abaixo é

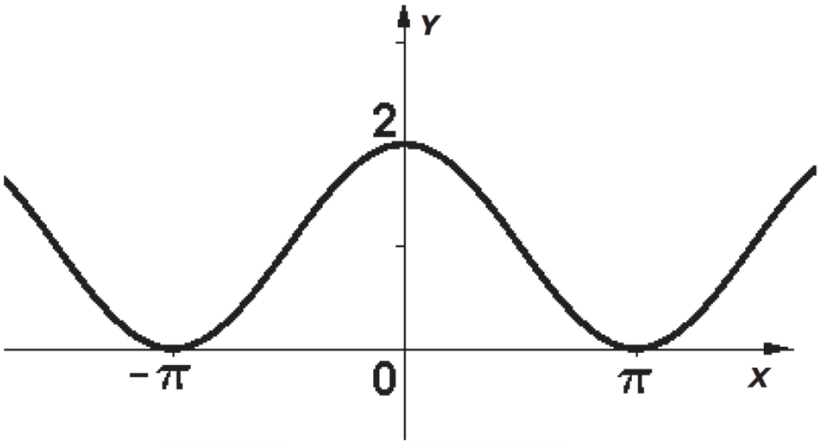
[A] f(x) = 1- sen($\pi$ - x).

[B] f(x) = 1 + cos($\pi$ - x).

[C] f(x) = 2 - cos($\pi$ + x).

[D] f(x) = 2 - sen($\pi$ + x).

[E] f(x) = 1 - cos($\pi$ - x).




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**3. ESPCEX – 2018)**

Seja A o maior subconjunto de no qual está definida a função real f(x) = $\sqrt{\dfrac{x^3 - 5x^2 - 25x + 125}{x+5}}$ Considere, ainda, B o conjunto das imagens de f. Nessas condições,

[A] A = IR - {-5} e B = $\mathbb{R}_+$ - {10}

[B] A = IR - {-5} e B = $\mathbb{R}_+$.

[C] A = IR - {-5} e B = IR.

[D] A = IR -{-5,5} e B = $\mathbb{R}_+$.

[E] A = IR -{-5,5} e B = $\mathbb{R}_+$ - {10}.

**4. ESPCEX – 2018)**

Enrico guardou moedas em um cofrinho por um certo período de tempo e, ao abri-lo, constatou que:

I. O cofrinho contém apenas moedas de R$ 0,25, R$ 0,50 e R$ 1,00.

II. A probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,25 é o triplo da probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50.

III. Se forem retiradas 21 moedas de R$ 0,25 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 0,50 passa a ser $\frac{9}{40}$.

IV. Se forem retiradas 9 moedas de R$ 0,50 desse cofrinho, a probabilidade de retirar uma moeda de R$ 1,00 passa a ser $\frac{1}{4}$.

Diante dessas constatações, podemos afirmar que a quantidade de moedas de R$ 0,25 nesse cofrinho era
[A] 27. [B] 32. [C] 33. [D] 81. [E] 108.

**5. ESPCEX – 2018)**

A equação $\log_3 x = 1 + 12.\log_{x^2} 3$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é
[A] 0. [B] $\frac{1}{3}$. [C] $\frac{3}{2}$. [D] 3. [E] 9.

**6. ESPCEX – 2018)**

A equação da reta tangente ao gráfico da função f(x) = $x^2 - 6x + 1$, no ponto (4,-7), é igual a
[A] y = - 2x + 1.

[B] y = 3x – 19.

[C] y = x – 11.

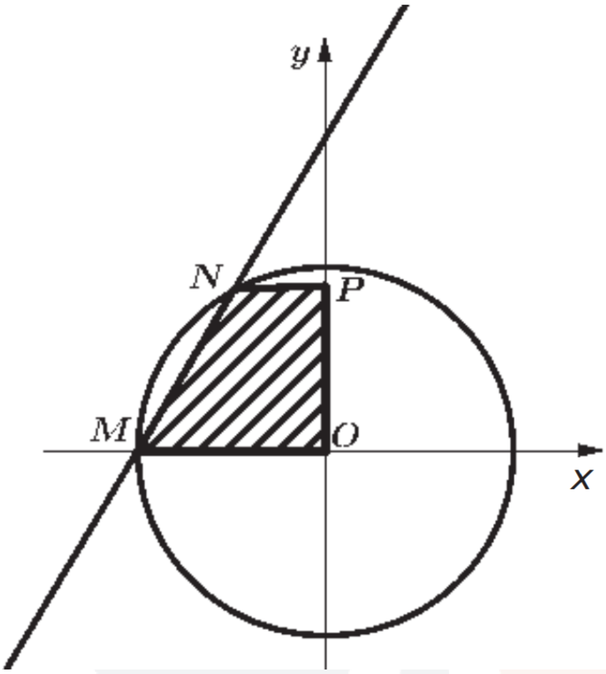
[D] y = - 3x + 5.

[E] y = 2x - 15.

**7. ESPCEX – 2018)**

Na figura abaixo, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 3$ e a reta suporte do segmento MN tem coeficiente angular igual a $\sqrt{3}$.

O volume do sólido gerado pela rotação do trapézio MNPO em relação ao eixo y é
[A] $\frac{3\pi}{8}$. [B] $\frac{21\pi}{8}$. [C] $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$. [D] $\frac{24\pi\sqrt{3}}{8}$. [E] $\frac{63\pi\sqrt{3}}{8}$.

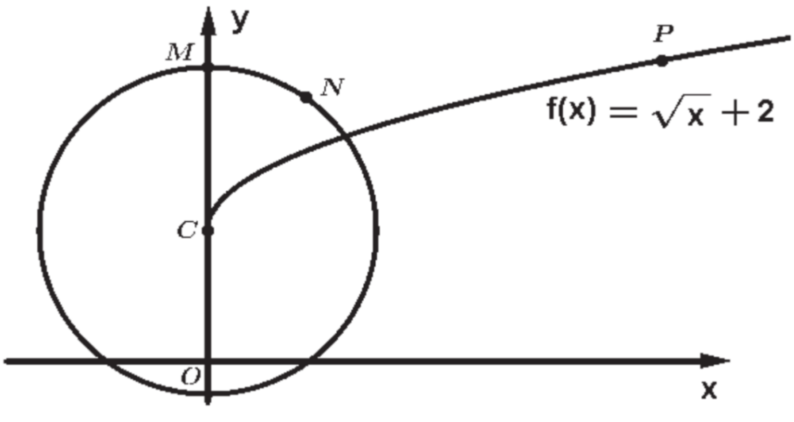



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**8. ESPCEX – 2018)**

Os pontos M(0,y), com y ≥ 0 e N($\sqrt{3}$, 4) pertencem a uma circunferência de centro C(0, 2). Considere o ponto P, do gráfico de f(x)= $\sqrt{x}$ + 2 , que possui ordenada y igual à do ponto M. A abscissa x do ponto P é igual a

[A] $\sqrt{7}$. [B] $\sqrt{7}$ + 2. [C] 7. [D] 9. [E] 12.

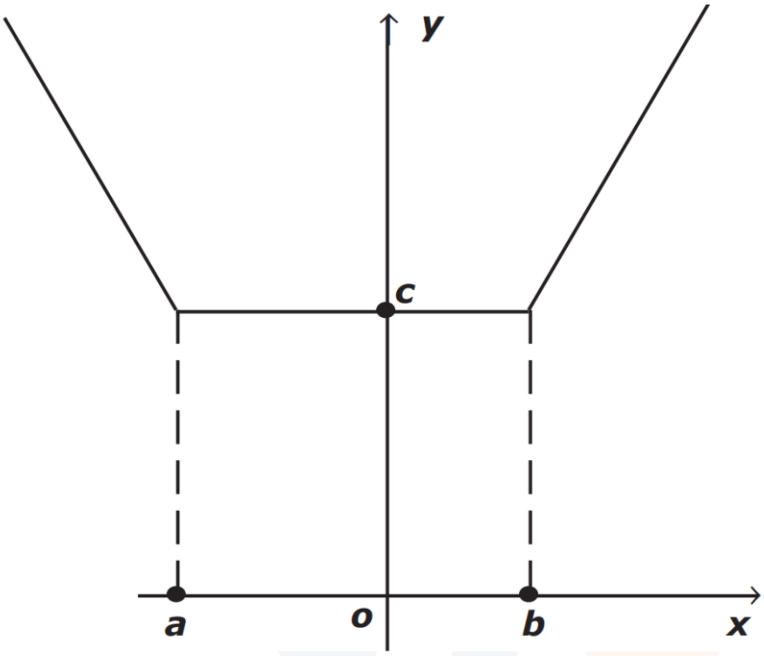



Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**9. ESPCEX – 2018)**

Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real f(x) = |x - 2| + |x + 3|, então o valor de a + b + c é igual a

[A] -7. [B] -6. [C] 4. [D] 6. [E] 10.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

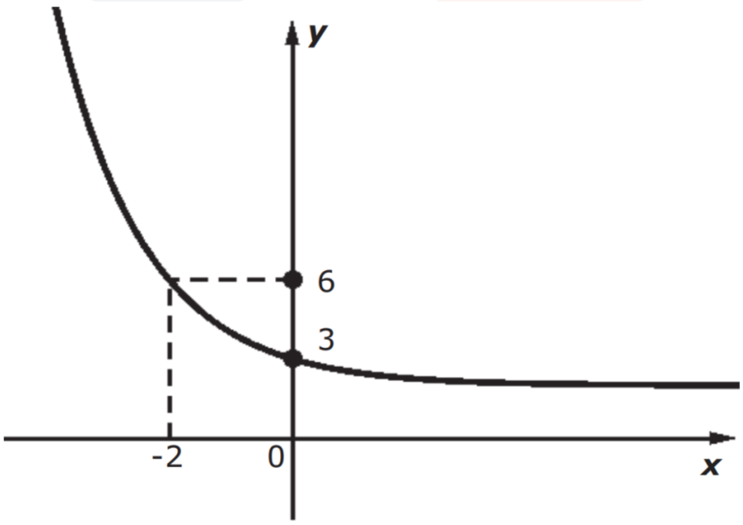
**10. ESPCEX – 2018)**

O número de raízes reais da equação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ no intervalo $]0,2\pi[$ é

[A] 0. [B] 1. [C] 2. [D] 3. [E] 4.

**11. ESPCEX – 2018)**

A figura mostra um esboço do gráfico da função $f(x) = a^x + b$, com a e b reais, $a>0$, $a\neq1$ e $b\neq0$.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

Então, o valor de f(2) - f(-2) é igual a

[A] $-\frac{3}{4}$. [B] $-\frac{15}{4}$. [C] $-\frac{1}{4}$. [D] $-\frac{7}{6}$. [E] $-\frac{35}{6}$.

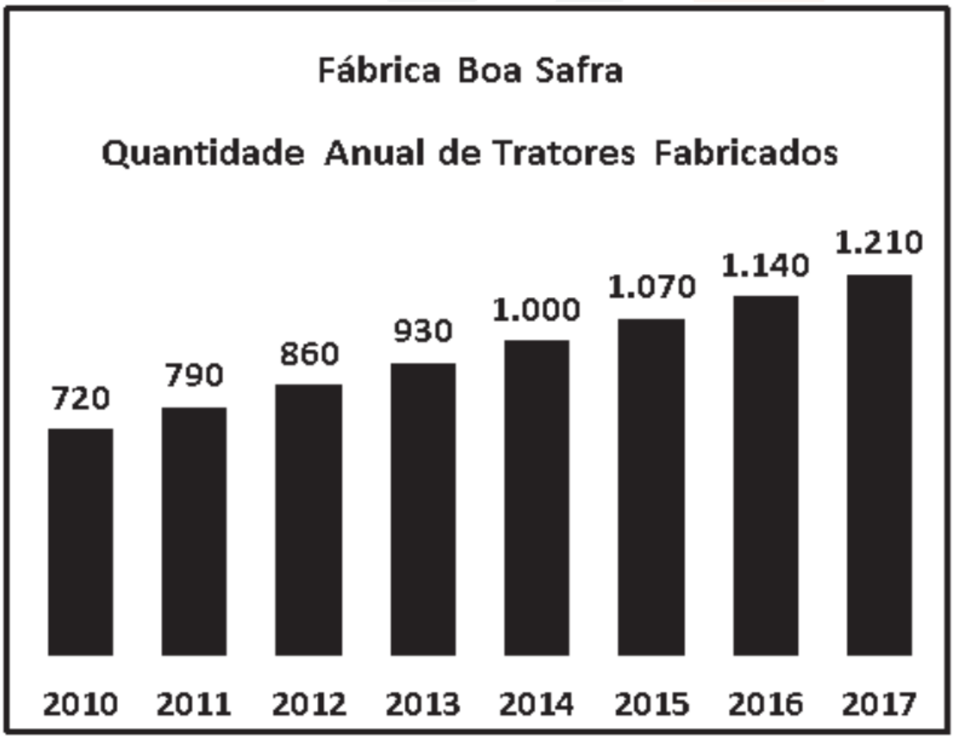
**12. ESPCEX – 2018)**

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (\sqrt{3})^{4 + 2\text{sen}3x}$ e a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{1 + 3\cos 2x}$. O produto entre o valor mínimo de f e o valor máximo de g é igual a

[A] $\frac{1}{81}$. [B] $\frac{1}{9}$. [C] 1. [D] 9. [E] 81.

**13. ESPCEX – 2018)**

Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20.000 tratores até o final do ano de 2025. O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista

[A] deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores.

[B] deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.

[C] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1.850 tratores a menos.

[D] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos.

[E] não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

**14. ESPCEX – 2018)**

Os centros de dois círculos distam 25 cm. Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm, a medida da corda comum a esses dois círculos é

[A]12 cm. [B] 24 cm. [C] 30 cm. [D] 32 cm. [E] 36 cm.

**15. ESPCEX – 2018)**

Em um triângulo ABC, $\overline{BC}$ = 12 cm e a mediana relativa a esse lado mede 6 cm. Sabendo-se que a mediana relativa ao lado AB mede 9 cm, qual a área desse triângulo?

[A] $\sqrt{35}\ cm^2$. [B] $2\sqrt{35}\ cm^2$. [C] $6\sqrt{35}\ cm^2$. [D] $\frac{\sqrt{35}cm^2}{2}$. [E] $3\sqrt{35}\ cm^2$.

**16. ESPCEX – 2018)**

Uma hipérbole tem focos $F_1$(-5,0) e $F_2$(5,0) e passa pelos pontos P(3,0) e Q(4,y), com y>0. O triângulo com vértices em $F_1$, P e Q tem área igual a

[A] $\frac{16\sqrt{7}}{3}$. [B] $\frac{16\sqrt{7}}{5}$ [C] $\frac{32\sqrt{7}}{3}$. [D] $\frac{8\sqrt{7}}{3}$. [E] $\frac{8\sqrt{7}}{5}$.

**17. ESPCEX – 2018)**

Considere o conjunto de números naturais {1, 2, ..., 15}. Formando grupos de três números distintos desse conjunto, o número de grupos em que a soma dos termos é ímpar é

[A] 168. [B] 196. [C] 224. [D] 227. [E] 231.

**18. ESPCEX – 2018)**

Sabendo que o número complexo i (sendo i a unidade imaginária) é raiz do polinômio p(x)= $x^5 - 2x^4 - x + 2$, podemos afirmar que p(x) tem

[A] duas raízes iguais a i, uma raiz racional e duas raízes irracionais.

[B] i e -i como raízes complexas e três raízes irracionais.

[C] uma raiz complexa i e quatro raízes reais.

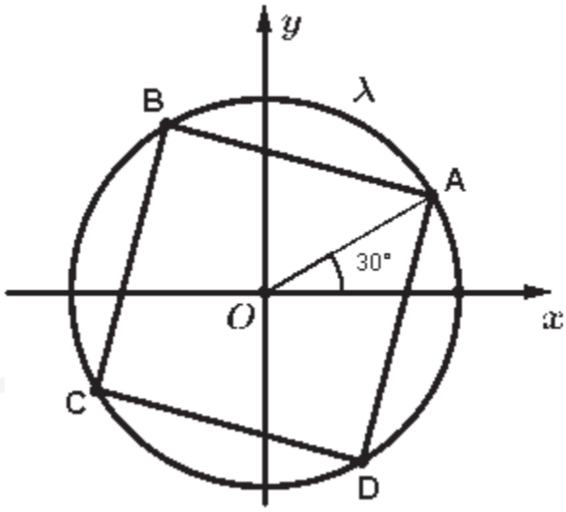
[D] i e -i como raízes complexas e três raízes inteiras.

[E] três raízes simples e uma raiz dupla.

**19. ESPCEX – 2018)**

No plano complexo, temos uma circunferência λ de raio 2 centrada na origem. Sendo ABCD um quadrado inscrito à λ, de acordo com a figura abaixo, podemos afirmar que o número complexo que representa o vértice B é

[A] $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. [B] $-\sqrt{3}-i$. [C] $-1+\sqrt{3}i$. [D] $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. [E] $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.




Desenho Ilustrativo Fora de Escala

**20. ESPCEX – 2018)**

Considere uma circunferência de centro O e raio 1 cm tangente a uma reta r no ponto Q. A medida do ângulo MÔQ é 30°, onde M é um ponto da circunferência. Sendo P o ponto da reta r tal que PM é paralelo a OQ, a área (em cm²) do trapézio OMPQ é

[A] $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$. [B] $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$. [C] $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. [D] $2-\frac{\sqrt{3}}{8}$. [E] $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

# Gabarito

1. B
2. E
3. B
4. D
5. D
6. E
7. B
8. C
9. C
10. D
11. B
12. D
13. E
14. B
15. C
16. A
17. C
18. D
19. C
20. A