PARECER sobre questão de permutação circular da prova de ESCRIVÃO da PCDF 2021

O CESPE divulgou seus gabaritos preliminar e definitivo da prova de Escrivão da PCDF aplicada em 21/08/2021 considerando o seguinte item como sendo CERTO.

Matriz_CE

Em cada um dos itens a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

118 Seis pessoas devem se reunir em uma mesa redonda, mas duas delas não podem se sentar uma ao lado da outra. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de essas seis pessoas sentarem em torno dessa mesa é superior a 400.
JUSTIFICATIVA - CERTO. Uma das pessoas que tem restrição de posicionamento na mesa tem seis possibilidades de tomar assento nessa mesa. A segunda pessoa com restrição teria então três possibilidades de tomar assento à mesa. Portanto as duas pessoas com restrição de posicionamento teriam $6 \times 3 = 18$ possibilidades de posicionamento. Como as outras quatro pessoas podem se sentar em qualquer local, então tem-se $18 \times 4! = 18 \times 24 = 432$ possibilidades de essas pessoas tomarem assento à mesa.

Segue abaixo transcrição do item e da justificativa do CESPE para o gabarito CERTO:

Em cada um dos itens a seguir, é apresentada uma situação hipotética seguida de uma assertiva a ser julgada.

( ) Seis pessoas devem se reunir em uma mesa redonda, mas duas delas não podem se sentar uma ao lado da outra. Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de essas seis pessoas sentarem em torno dessa mesa é superior a 400.

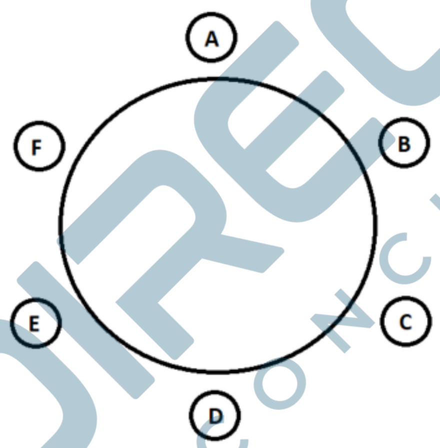
JUSTIFICATIVA – CERTO. Uma das pessoas que tem restrição de posicionamento na mesa tem seis possibilidade de tomar assento na mesa. A segunda pessoa com restrição teria então três possibilidades de tomar assento à mesa. Portanto as duas pessoas com restrição de posicionamento teriam 6 x 3 = 18 possibilidades de posicionamento. Como as outras quatro pessoas podem se sentar em qualquer local, então tem-se 18 x 4! = 18 x 24 = 432 possibilidades de essas pessoas tomarem assento à mesa.

Trata-se de um problema de permutações distintas num círculo, em que o exemplo clássico consiste em pessoas que devem se sentar ao redor de uma mesa.

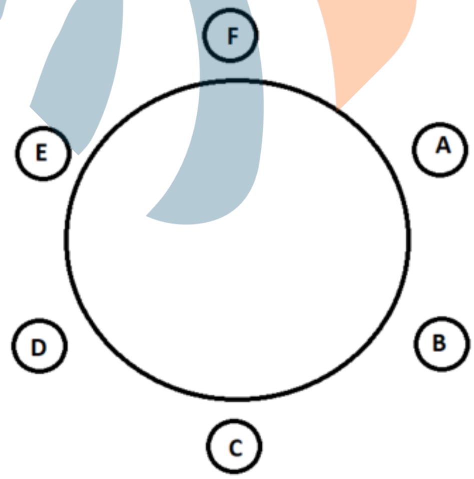
Ressalte-se aqui que as permutações devem ser DISTINTAS. O próprio enunciado da questão pediu a quantidade de maneiras DISTINTAS de se sentarem as seis pessoas em torno da mesa satisfazendo a restrição dada.

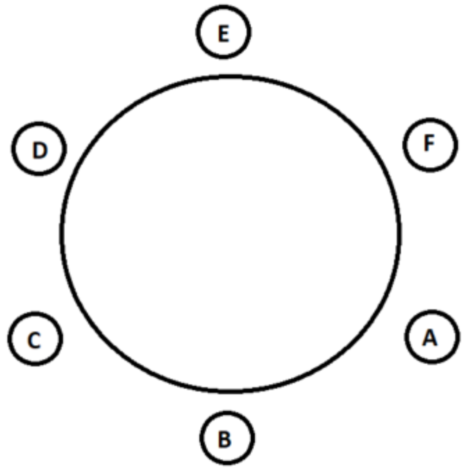
Primeiramente, vamos entender por que essa distinção é importante.

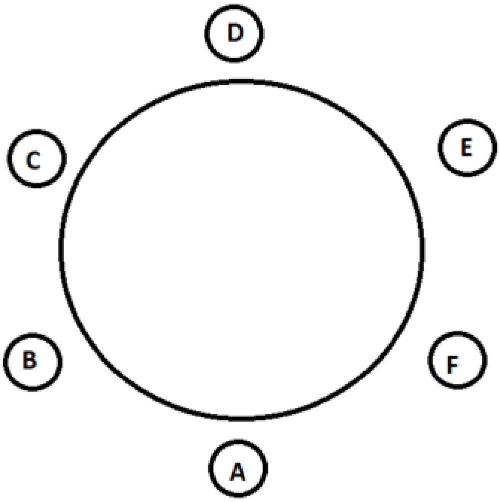
Vamos representar as 6 pessoas por letras: A, B, C, D, E, F. Uma possível forma delas se sentarem ao redor de uma mesa é a seguinte:

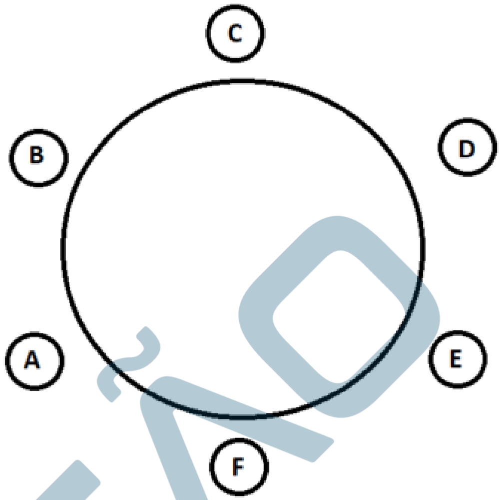


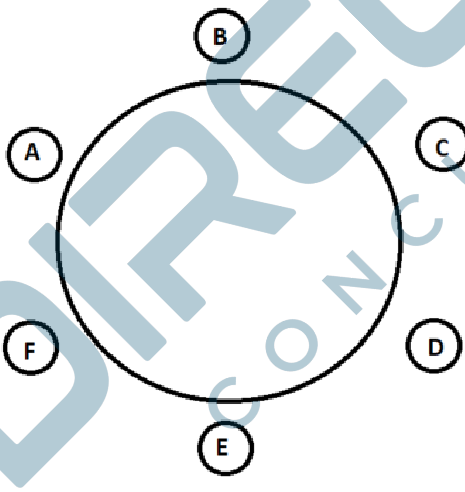
Ocorre que a situação mostrada acima é idêntica às mostradas abaixo, às quais foram obtidas por mero movimento de rotação aplicado ao arranjo anterior:









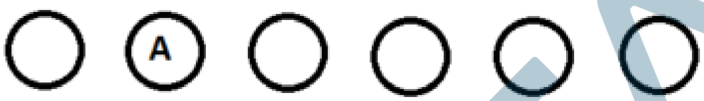


Repare que em todas as seis situações mostradas acima, as pessoas sentadas à mesa estão sempre na mesma posição relativa, ou seja:

- A tem à sua direita F e à sua esquerda B, em TODAS as permutações mostradas;
- B tem à sua direita A e à sua esquerda C, em TODAS as permutações mostradas;
- C tem à sua direita B e à sua esquerda D, em TODAS as permutações mostradas;
- D tem à sua direita C e à sua esquerda E, em TODAS as permutações mostradas;
- E tem à sua direita D e à sua esquerda F, em TODAS as permutações mostradas;
- F tem à sua direita E e à sua esquerda A, em TODAS as permutações mostradas;

Assim, verifica-se que não nos interessa <u>QUALQUER</u> permutação nesse problema, mas somente aquelas que constituem maneiras <u>DISTINTAS</u> das seis pessoas se sentarem à mesa. Em outras palavras, não podemos computar como SEIS as permutações representadas no exemplo acima, mas tão somente como UMA, uma vez que as SEIS disposições analisadas são iguais em sua essência, já que as pessoas sentadas à mesa estão sempre na mesma posição relativa em relação às outras.

Caso estivéssemos diante de um problema em que as seis pessoas devem se sentar em uma fila de seis cadeiras, a resolução do CESPE faria mais sentido. Exemplificando, vamos supor que A e B sejam as pessoas que possuam a restrição de não poderem se sentar uma ao lado da outra. No caso abaixo, A é o primeiro a se sentar em uma das seis cadeiras:



Para isso, ele tem seis opções de escolha, o que é compatível com o seguinte trecho da resolução do CESPE: “Uma das pessoas que tem restrição de posicionamento na mesa tem seis possibilidade de tomar assento na mesa.” De fato, para se sentar em uma das seis cadeiras, A tem 6 possibilidades, visto que aqui podemos considerar que existe uma cadeira na extremidade esquerda, existe uma cadeira adjacente a essa e assim por diante, ou seja, existem referenciais que distinguem uma cadeira da outra.

Posteriormente, considerando que B não possa se sentar ao lado de A, só lhe restam três opções, mostradas em vermelho abaixo:

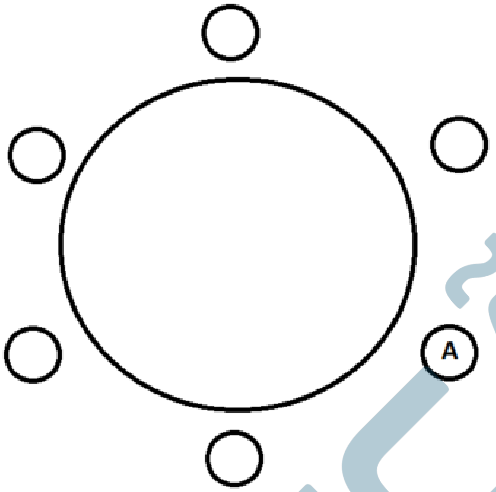
Isso seria compatível com o seguinte trecho da resolução: “A segunda pessoa com restrição teria então três possibilidades de tomar assento à mesa.”

Portanto, no caso do arranjo linear das cadeiras, é plausível aplicar a solução do CESPE.

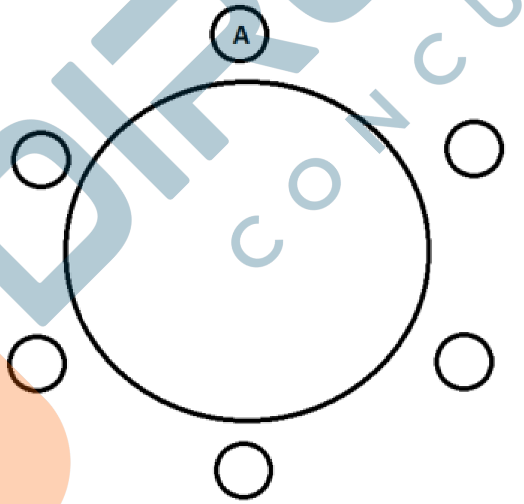
No entanto, quando retornamos ao enunciado da questão o erro da resolução se torna gritante.

Ao dizer que “uma das pessoas que tem restrição de posicionamento na mesa tem seis possibilidade de tomar assento na mesa” o CESPE ignorou o fato de que a primeira pessoa a se sentar tem seis cadeiras IGUAIS a seu dispor, uma não tem diferença da outra, uma vez que não há nenhum referencial espacial passível de utilização para diferenciar uma posição de outra. Não há, por exemplo, uma cadeira na “extremidade esquerda”, o que seria um referencial. Simplesmente, inexistem referenciais numa mesa circular. Vamos exemplificar.

Supondo que A e B representem as pessoas que não podem se sentar uma ao lado da outra e sendo A o primeiro a se sentar dos seis elementos, ele pode se sentar da seguinte forma:



Ou, ainda, ele poderia se sentar assim:



Há ainda outras quatro posições em que A poderia se sentar, sendo o primeiro a fazê-lo. No entanto, todas essas posições são idênticas entre si, uma vez que não há referência espacial capaz de distinguir um arranjo de outro. Em outras palavras, as possíveis possibilidades de assento de A são obtidas uma a partir da outra, bastando, para isso, mera rotação da figura, o que não caracteriza distinção espacial entre as configurações.

Em síntese, quando A vai escolher um assento para se sentar, sendo ele o primeiro a fazê-lo, mesmo que existam seis cadeiras disponíveis, a escolha de uma cadeira ou outra consiste em APENAS UMA configuração espacial, de forma que não podemos contabilizar esse fato como seis possibilidades, mas tão somente como UMA.

Esse foi o GRANDE ERRO da resolução do CESPE. Na permutação circular, a primeira pessoa a se sentar não tem referencial nenhum. Ou seja, todos os 6 assentos são iguais para ela, nada distingue um do outro. É por isso que na permutação circular de n elementos, utilizamos a fórmula (n -1)!, justamente porque, na prática, a primeira pessoa a se sentar só tem uma opção, visto que todos os assentos são iguais, já que não existe referencial ou distinção entre os assentos.

Superada essa inconsistência, o restante da resolução da eminente banca está correto, bastando fazer alguns ajustes decorrentes da correção anteriormente mostrada. Vejamos:

- “A segunda pessoa com restrição teria então três possibilidades de tomar assento à mesa.” Até aqui está correto;

- “Portanto as duas pessoas com restrição de posicionamento teriam 6 x 3 = 18 possibilidades de posicionamento.” Aqui devemos fazer o ajuste de que as duas pessoas com restrição de posicionamento teriam 1 x 3 = 3 possibilidades de posicionamento;

- “Como as outras quatro pessoas podem se sentar em qualquer local, então tem-se 18 x 4! = 18 x 24 = 432 possibilidades de essas pessoas tomarem assento à mesa.” Fazendo os ajustes, teríamos o seguinte: como as outras quatro pessoas podem se sentar em qualquer local, então tem-se 3 x 4! = 3 x 24 = 72 possibilidades de essas pessoas tomarem assento à mesa.

OUTRA FORMA DE RESOLVER

A permutação circular de n elementos é dada por (n – 1)!.

A permutação circular de 6 elementos é dada por (6 – 1)! = 5! = 120. Portanto, as 6 pessoas têm 120 formas distintas de se sentarem em torno da mesa. Como duas delas não podem estar uma ao lado da outra, vamos obter esses casos e depois excluídos.

Cálculo dos casos em que as duas pessoas com restrição se sentam juntas: podemos considerar essas duas pessoas como UM elemento. Nesse caso, basta fazer a permutação circular de 5 elementos, que é dada por (5 – 1)! = 4! = 24. Além disso, dentre as duas pessoas com restrição que consideramos como um único elemento, devemos levar em conta que uma pessoa pode estar à esquerda ou direita da outra. Assim, o total de casos em que essas duas pessoas se sentam juntas é 2 x 24 = 48 casos.

Com isso, concluímos que a quantidade de maneiras distintas de essas seis pessoas se sentarem em torno dessa mesa de forma que duas delas não se sentem uma ao lado da outra é igual a 120 – 48 = 72.

Dessa forma, está demonstrado que o gabarito da questão é ERRADO, uma vez que a quantidade de maneiras distintas daquelas seis pessoas se sentarem em torno da mesa é inferior a 400.

REFORÇO DO ARGUMENTO

O livro Matemática para o ensino médio – volume II, citado na referência bibliográfica, possui exemplo muito semelhante ao caso em questão na página 121. Segue trecho abaixo:

Exemplos:

i) De quantos modos 4 casais, entre os quais João e Maria, podem sentar-se em torno de uma mesa circular de 8 lugares:

a) possíveis?
Fixando uma das pessoas, basta permutar as demais, logo teremos $7! = 5\,040$ disposições.

b) em que João e Maria estejam juntos?
Fixando João e Maria lado a lado e permutando as pessoas restantes teremos $6!$ casos. Como João e Maria podem estar lado a lado de 2 modos distintos, teremos finalmente $6! \cdot 2 = 720 \cdot 2 = 1\,440$ casos.

c) em que João e Maria estejam afastados?
Basta subtrair do total $5\,040$ os $1\,440$ casos em que eles estão juntos, logo, teremos $5\,040 - 1\,440 = 3\,600$ casos.

Na letra a), ele calculou o número de maneiras em que <u>8 pessoas</u> podem se sentar em uma mesa. Para isso, ele tem duas opções: uma seria usar a fórmula da permutação circular: (n – 1)! = (8 – 1)! = 7! = 5040. A outra forma, que foi a utilizada por ele, foi a de FIXAR o primeiro elemento e PERMUTAR os demais elementos, de forma a criar um referencial espacial para as sete pessoas restante. Assim, basta fazer 7!. Perceba que o resultado numérico entre essas duas formas de resolução é idêntico.

Na letra b) ele obteve o número de configurações em que determinado casal estaria junto. Uma forma de fazer seria considerar essas duas pessoas como UM elemento e aplicando a permutação circular de 7 elementos, que é dada por (7 – 1)! = 6!. Outra forma de fazer, que foi a utilizada no livro, foi a de fixar esse casal, sobrando 6 elementos para permutar: 6!. Além disso, em ambos o caso devemos considerar que nesse casal um pode estar sentado à direita do outro, e vice-versa, exatamente como fizemos em nossa resolução da questão do CESPE.

Na letra c) ele obtém os casos em que João e Maria estão afastados. Ora, trata-se justamente do que pediu a questão do CESPE, só que nesse caso o livro trabalha um exemplo com 8 elementos. Para resolver, ele simplesmente faz a diferença entre os montantes obtidos em a) e b), ou seja, ele pega o TOTAL de formas em que 8 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular e SUBTRAI daquele TOTAL os casos em que as duas pessoas de interesse estão sentadas juntas, obtendo apenas os casos em que aquelas duas pessoas não se sentam juntas.

Foi exatamente o que fizemos em nossa resolução da questão do CESPE:

- TOTAL de formas em que 6 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular: (6 – 1)! = 5! = 120

- Casos em que as duas pessoas de interesse estão sentadas juntas: (5 – 1)! = 4! = 24. Considerando que as duas pessoas podem estar sentadas à direita ou esquerda uma da outra obtemos 2 x 24 = 48 casos.

- Subtração entre o TOTAL e os casos em que as duas pessoas se sentam juntas: 120 – 48 = 72, que são os casos em que aquelas duas pessoas não se sentam juntas.

Dessa forma, por mais de uma via, fica novamente demonstrado que o gabarito da questão do CESPE é ERRADO, uma vez que a quantidade de maneiras distintas daquelas seis pessoas se sentarem em torno da mesa é inferior a 400.

Prof. Hugo Lima **Prof. Arthur Lima**

Apresentações

Hugo Lima é Engenheiro Mecânico-Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Trabalhou por 5 anos e meio na Força Aérea Brasileira, como oficial engenheiro. Foi aprovado para o cargo de Auditor-Fiscal em 2012, cargo que exerce atualmente. Trabalha com concursos públicos desde 2016, com Raciocínio Lógico-Matemático.

Arthur Lima é Engenheiro Aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Foi engenheiro na EMBRAER S/A por 5 anos. Foi aprovado nos concursos de Auditor-Fiscal e Analista-Tributário da Receita Federal, e exerceu o cargo de Auditor por 6 anos. É professor há 10 anos das disciplinas de Matemática, Raciocínio Lógico, Matemática Financeira e Estatística para concursos públicos, além de sócio fundador do Direção Concursos.

Referência Bibliográfica:

JORGE, Miguel; TEIXEIRA, Ralph Costa; COUTO FILHO, Thales do; SILVA, Felipe Ferreira da; Matemática para o ensino médio – volume II, Fundação Getúlio Vargas, Editora do Brasil, 2010, 1ª edição